

MODELLAZIONE NUMERICA DEI FENOMENI DI COLATA RAPIDA

Domenico Pianese – Luca Cozzolino - Lisa Maria Castro Tellez – Carmela Mucherino

Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale “Girolamo Ippolito”

Università degli Studi di Napoli Federico II – Via Claudio n.21 – 80125 Napoli

Sommario

La modellazione, per via numerica, dei fenomeni di colata rapida di fango e/o detriti pone numerosi problemi di carattere concettuale, fisico e matematico, che possono essere superati solo con approcci particolarmente adatti a portare in conto il complesso dei fenomeni che, effettivamente, possono osservarsi in natura: formazione di fronti ripidi, brusche variazioni delle caratteristiche del moto indotte da ostacoli e/o particolari configurazioni morfologiche dei versanti e dei valloni, possibilità di sviluppo di risalti e di vortici ad asse verticale, ecc. Nel presente lavoro, allo scopo di mettere a punto algoritmi di calcolo particolarmente idonei ad affrontare e risolvere i suddetti problemi, ed in grado di essere applicati a casi reali sia ai fini della perimetrazione delle aree a rischio di colata rapida che per la progettazione/verifica di interventi di mitigazione, si è proceduto, da un lato, ad un’accurata analisi dei fenomeni da portare in conto, e, dall’altro, a proporre due diversi tipi di modelli numerici, rispettivamente uni- e bi-dimensionale, basati sull’ormai collaudato Metodo dei Volumi Finiti. Vengono infine sintetizzati alcuni dei risultati sin qui conseguiti dal gruppo di ricerca operante, nell’ambito di diversi programmi di ricerca del MIUR e di convenzioni con Enti Pubblici, presso il Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale “G. Ippolito” dell’Università degli Studi di Napoli Federico II.

1. PREMESSE

La modellazione dei fenomeni di colata rapida di fango e/o detriti viene effettuata, molto frequentemente, con riferimento ad approcci numerici e schemi di calcolo già disponibili per l’analisi dei fenomeni di moto vario di correnti liquide, avendo solo cura di sostituire, al loro interno, le classiche espressioni che portano in conto i fenomeni dissipativi che si sviluppano in seno alle correnti liquide con più idonee espressioni in grado di portare in conto le caratteristiche reologiche della colata (Chen, 1988; Chen, 1997). Ciò, nell’ipotesi, senz’altro accettabile per i tratti

centrali di fossi e valloni interessati dai fenomeni di colata rapida, che la concentrazione di solidi presenti all'interno del miscuglio costituito da sedimenti frammisti ad acqua non vari nel tempo e nello spazio, e che il contorno all'interno del quale si sviluppa il moto non abbia, a sua volta, a modificarsi per effetto delle azioni trasmessegli dalla sovrastante corrente detritica.

Rispetto alla concreta possibilità di utilizzare i suddetti modelli anche in campo tecnico, va tuttavia osservato che, in conseguenza della particolare forma delle equazioni di bilancio di volta in volta prese a riferimento (spesso “non conservativa” e “differenziale”), e/o della modalità con cui viene schematizzato il dominio di calcolo, la gran parte dei modelli di moto vario finalizzati all'analisi della propagazione dei fenomeni di piena non appare idonea a portare in conto le rapide e brusche variazioni che le grandezze caratteristiche di tali correnti (velocità, tiranti, ecc.) subiscono durante l'evento. Ciò, in particolare, se, da un lato, si tiene conto che, a causa delle forti pendenze dei tratti interessati dalla propagazione di colate di fango (finanche superiori, nel caso di colate su versanti, al 100%), le correnti detritiche risultano supercritiche e possono, in presenza di ostacoli e/o restringimenti, dare luogo a risalti, vortici ad asse verticale; dall'altro, se si tiene in debito conto che la propagazione della colata avviene, di norma, in condizioni di “fondo asciutto”, per cui gli algoritmi utilizzati devono essere in grado di affrontare e risolvere tale aspetto.

Allo scopo di fornire un proprio autonomo contributo all'analisi di tali fenomeni e al dibattito internazionale, presso il Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale “Girolamo Ippolito” dell'Università degli Studi di Napoli Federico II si è da alcuni anni costituito un gruppo di ricerca, operante sia nell'ambito di progetti MIUR di interesse nazionale, sia nell'ambito di Convenzioni con Enti e Commissariati di Governo. Nel presente lavoro, si sintetizzano, più in particolare, le attività di ricerca sviluppate nell'ambito di una specifica Convenzione stipulata, sul tema della “Modellazione numerica dei fenomeni di colata rapida”, tra il *Dipartimento di Ingegneria Idraulica ed Ambientale “Girolamo Ippolito” dell'Università degli Studi di Napoli Federico II* e il *Commissariato di Governo per l'emergenza Idrogeologica nella regione Campania*, e si riportano alcuni dei risultati sin qui conseguiti con l'ausilio dei modelli numerici uni- e bi-dimensionali recentemente messi a punto ed utilizzati dagli scriventi (Barbiero et al., 2002; Pianese & Barbiero, 2003; Cozzolino et al., 2003; Iavarone et al., 2003; Barbiero et. al., 2004; Pianese & Barbiero, 2004, Cozzolino et al., 2005)

2. MODALITÀ DI SVILUPPO DELLA CONVENZIONE

Le attività oggetto di Convenzione si sono sviluppate, così come richiesto dal Commissariato di Governo, in due fasi:

- **Prima fase**

Nella prima fase delle attività, si sono messi a punto due diversi modelli numerici, rispettivamente uni- e bi-dimensionale, finalizzati alla descrizione dei fenomeni di colata rapida che si sviluppano, rispettivamente, lungo le aste dei valloni e nelle aree pedemontane.

Tali modelli sono stati implementati in ambiente WINDOWS ed in linguaggio VISUALBASIC, normalmente gestibili dalla maggior parte dei personal computers disponibili presso Enti governativi, Centri di ricerca e studi professionali.

Per quanto riguarda il modello uni-dimensionale, nel corso della prima fase sono state implementate due distinte tecniche di risoluzione numerica delle equazioni che governano i fenomeni, basate, rispettivamente, sul cosiddetto “Metodo Integrale” (Cunge et al., 1980) e su un metodo ai “*Volumi finiti*”. Entrambe le tecniche sono state sviluppate nell’ambito di uno stesso ambiente di lavoro, che permette di utilizzare, indistintamente, le due metodologie di analisi.

Gli approcci adottati sono stati quindi verificati alla luce indagini sperimentali e di campo disponibili relativamente alla propagazione di correnti liquide, e di risultati analitici già disponibili relativamente ad alcuni casi piuttosto semplici, frequentemente considerati, in letteratura tecnica, quali test standard (Iavarone et al., 2004).

Per quanto riguarda il modello bi-dimensionale, si è sviluppato un codice di calcolo ai *Volumi Finiti*, già precedentemente messo a punto, seppure allo stadio embrionale, dal gruppo di ricerca operante presso il Dipartimento. Anche questo codice è stato preventivamente testato rispetto a dati di campo e di laboratorio e a risultati analitici tratti dalla letteratura esistente (Pianese & Barbiero, 2004).

Entrambi i codici prodotti fanno riferimento a condizioni di inerodibilità del fondo e delle pareti laterali, e sono in grado di portare in conto, nell’ambito di un’unica procedura di calcolo, differenti comportamenti reologici.

I programmi sono stati altresì integrati da softwares per il pre-processamento dei dati e delle geometrie da testare.

Per ciascuno di essi è stata prodotta una versione dimostrativa, che, in ottemperanza al programma dettagliato consegnato in data 19.03.2004, è poi quella effettivamente consegnata al Commissariato di Governo al termine della presente Convenzione, a riprova delle attività espletate e a testimonianza dell’affidabilità delle procedure adottate.

Acclusa alla presente relazione è, anche, un Rapporto Tematico volto ad illustrare le procedure di calcolo utilizzabili per la modellazione, per via numerica, dei fenomeni di propagazione ed arresto delle colate di fango e/o detriti, che si sarebbe dovuto consegnare al termine della prima fase.

- **Seconda fase**

Nell'ambito della Seconda fase, i modelli sviluppati nella prima fase sono stati utilizzati alla luce di dati di campo già disponibili (cfr. Barbiero et al., 2004), in modo da verificare la le loro capacità di analisi e di verificare i risultati ottenibili a partire da ciascuno di essi quando applicato allo stesso caso di studio.

Allo stato attuale il Commissariato non ha ancora provveduto a fornire all'U.O. tutti i dati necessari per l'applicazione dei modelli prodotti ad uno specifico caso di studio (che il Commissariato ha deciso essere quello del Vallone San Francesco-Connola) e, più in particolare, sia i dati topografici di base (rilevi piano-altimetrici e sezioni trasversali), sia l'indicazione dei valori da assumere per i parametri reologici da utilizzare nel modello dissipativo adottato, sia uno o più fangogrammi in arrivo dal bacino a monte.

Al termine della presente seconda ed ultima fase, in attesa di poter acquisire i dati necessari e dio eseguire le suddette simulazioni, sono consegnati:

- a) La versione finale del Rapporto Tematico, volto ad illustrare alcune delle procedure di calcolo utilizzabili per la modellazione, per via numerica, dei fenomeni di propagazione ed arresto delle colate di fango e/o detriti;
- b) Un piccolo manuale d'uso dei softwares prodotti (circa 20 pagine illustrate);
- c) Una versione perfettamente funzionante, seppure di fruibilità limitata, dei due codici di calcolo, in grado di trattare, nel caso di modellazioni unidimensionali, non più di 10 sezioni trasversali, e, nel caso di modellazioni bidimensionali, una mesh costituita da non più di 250 elementi triangolari. Tali codici saranno installati presso un solo computer della Struttura Commissariale;

Si è inoltre provveduto a sviluppare, attraverso stages di n. 2 settimane, le attività di ddestramento di n. 2 unità del personale del Commissariato all'uso dei suddetti codici, per un numero complessivo pari a quattro settimane uomo.

3. DESCRIZIONE DEI MODELLI NUMERICI PREDISPOSTI DALL'UNITÀ OPERATIVA

3.1 Osservazioni generali

Dopo una fase di avvio, precedente alla stipula della Convenzione, durante la quale gli approcci adottati risultavano sostanzialmente unidimensionali e basati su tecniche di risoluzione numerica di equazioni scritte in forma “integrale” e “conservativa” del tutto riconducibili a quelle proposte in letteratura tecnica per la simulazione della propagazione di piene in ambito fluviale, l'Unità

operativa di Napoli ha prodotto due distinti modelli numerici per la simulazione dei fenomeni di colata, entrambi ai Volumi Finiti, di cui il primo mono-dimensionale e, il secondo, bi-dimensionale.

Allo scopo di rendere perfettamente confrontabili i risultati da essi ottenibili, si è fatto riferimento, da un lato, ad una stessa modalità di scrittura delle equazioni di bilancio che governano i fenomeni in esame e, dall'altro, a una stessa procedura di risoluzione numerica delle equazioni stesse. Più in particolare, il metodo di risoluzione adottato è stato, per entrambi i modelli, quello ai Volumi Finiti, in base al quale, suddiviso il campo di moto (uni-dimensionale o bi-dimensionale) in *celle* tra di loro non sovrapposte, si integrano nello spazio, in ognuna delle celle, le equazioni differenziali esprimenti i principi di conservazione della massa e della quantità di moto, originariamente scritte in forma conservativa, in modo da riuscire a rappresentare la formazione di discontinuità nel campo di moto.

Procedendo in tal modo, si ottiene un set di equazioni differenziali ordinarie, le cui incognite rappresentano i valori medi delle quantità conservative (massa, componenti della quantità di moto) all'interno delle celle: l'accoppiamento delle diverse equazioni differenziali ordinarie avviene tramite termini che rappresentano gli scambi, attraverso l'interfaccia tra le celle, delle quantità conservative.

Stante la relativa novità di alcuni procedimenti adottati, con particolare riferimento all'applicazione di modelli bidimensionali su griglia non strutturata al contenimento degli effetti derivanti dai fenomeni di colata rapida, nei prossimi paragrafi verranno dettagliati i metodi numerici adottati.

3.2 Descrizione del modello bi-dimensionale

3.2.1 Approccio adottato

Preliminarmente, si può osservare che i fenomeni di propagazione ed arresto delle colate di fango si caratterizzano, rispetto ad altri fenomeni studiati nell'ambito dell'Ingegneria Idraulica, per il contemporaneo verificarsi di più fenomeni, che ne rendono difficile la modellazione numerica:

- la necessità di propagare un'onda su fronte asciutto, e quindi la necessità di tracciare il confine mobile tra la regione ove è presente la corrente, e la regione asciutta;
- la possibilità che si verifichino correnti ipo-critiche, iper-critiche oppure trans-critiche, con formazione di risalti mobili;
- la necessità di modellare in maniera accurata reologie complesse;
- la complessità della valutazione dei fenomeni di trasporto solido;

- da ultimo, l'estrema rapidità dei fenomeni, quindi con la possibilità di avere non solo le discontinuità spaziali fin qui descritte, ma anche discontinuità temporali.

Di tutti i fenomeni cui si è accennato, i più difficili da modellare sono quelli relativi alla formazione di discontinuità spaziali (propagazione su fronte asciutto e presenza di passaggi, eventualmente multipli, attraverso lo stato critico). I modelli realizzati dall'Unità Operativa di Napoli si caratterizzano, rispetto agli altri, proprio per gli algoritmi adottati per raggiungere tale scopo.

3.2.2 Le equazioni utilizzate

Nella letteratura scientifica si ammette, comunemente, di poter modellare con sufficiente precisione i fenomeni di propagazione della colata adottando le *equazioni delle acque basse*, eventualmente estese per tenere conto degli sforzi laminari e turbolenti che agiscono tra un elemento di volume e l'altro attraverso l'interfaccia. A questo proposito è possibile citare, tra gli altri, i lavori di O'Brien et al. (1993), nonché di Han & Wang (1996), i quali partono dal presupposto che, in mancanza di conoscenze più approfondite, sia possibile modellare il fenomeno supponendo costante nel tempo e nello spazio il peso specifico del miscuglio di acqua e solido

Scelto un sistema di riferimento di assi x e y nel piano orizzontale, le equazioni alle acque basse possono essere scritte nella forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hU^2 + K_x \frac{gh^2}{2} - 2h\nu \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hUV - h\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) &= gh(S_{ox} - S_{fx}) \\ \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(hUV + -h\nu \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(hV^2 + K_y \frac{gh^2}{2} - 2h\nu \frac{\partial V}{\partial y} \right) &= gh(S_{oy} - S_{fy}) \end{aligned} \quad (1)$$

in cui h , U e V , rappresentano, rispettivamente, l'altezza della corrente e le componenti, lungo x e y , della velocità W mediata sulla verticale; g = accelerazione di gravità; S_{ox} , S_{oy} = pendenze di fondo lungo le direzioni x e y ; S_{fx} , S_{fy} = *friction slopes* lungo le direzioni x e y ; K_x , K_y = fattori correttivi della spinta idrostatica (Yen, 1973), introdotti allo scopo di portare in debito conto l'effetto delle pendenze di fondo ed, eventualmente, una distribuzione non idrostatica delle pressioni; ν = viscosità cinematica complessiva, somma di viscosità cinematica, viscosità turbolenta ed effetti dispersivi.

Per modellare le resistenze al moto, si è adottata una legge reologica alla Herschel-Bulkley, tri-parametrica, del tipo (Komatina & Dordevic, 2004):

$$\tau = \tau_c + k \left(\frac{dw}{dz} \right)^\eta \quad (2)$$

Nella (2), τ_c è lo sforzo tangenziale di soglia, al di sotto del quale non è presente movimento, k è un coefficiente che, nel caso in cui $\eta = 1$, rappresenta la viscosità del miscuglio; η è un parametro caratterizzante la modalità prevalente con cui, all'interno del miscuglio, avvengono i fenomeni dissipativi; w è la velocità, valutata alla distanza z dal fondo. L'integrazione della (2) lungo la perpendicolare al fondo conduce alla seguente espressione della velocità mediata lungo la verticale W , valida in condizioni di moto stazionario e uniforme:

$$W = \begin{cases} h \leq \frac{\tau_c}{g\rho \operatorname{sen}\theta_f} \Rightarrow W = 0 \\ h > \frac{\tau_c}{g\rho \operatorname{sen}\theta_f} \Rightarrow W = \frac{\eta+1}{\eta} \left(\frac{g\rho \operatorname{sen}\theta_f}{k} \right)^{\frac{1}{\eta}} \left(h - \frac{\tau_c}{g\rho \operatorname{sen}\theta_f} \right)^{\frac{1+\eta}{\eta}} \left[1 - \frac{\eta}{1+2\eta} \left(1 - \frac{\tau_c}{g\rho \operatorname{sen}\theta_f} \right) \right] \end{cases} \quad (3)$$

Nella (3), θ_f è l'angolo che il fondo forma con l'orizzontale, lungo la direzione del moto e ρ è la densità del miscuglio. Nei casi, quali quelli di seguito esaminati, nei quali il moto non sia uniforme e stazionario, si suppone di potere ancora utilizzare la (3), avendo tuttavia cura di sostituire, a $\operatorname{sen}\theta_f$, il valore locale di S_f , e alla velocità W quella calcolata col modello di moto vario non uniforme. I valori che, per l'area sarnese, possono essere utilizzati per le costanti che appaiono nella (6) sono quelli a suo tempo individuati, per le coltri piroclastiche dell'area sarnese, da Papa (2002): $\tau_c = 100$ N/m², $\rho = 1600$ kg/m³, $k = 3$ Pa·s, $\eta = 1$.

Nelle equazioni (1) compaiono dei termini proporzionali, secondo il coefficiente v , al gradiente della velocità mediata lungo la verticale: tali termini sono rappresentativi degli scambi di quantità di moto che avvengono, attraverso le pareti, tra cella e cella, ad opera degli sforzi tangenziali viscosi e turbolenti, nonché ad opera degli sforzi cosiddetti dispersivi. In assenza di un'accurata conoscenza della struttura verticale degli sforzi tangenziali viscosi e turbolenti, e della distribuzione delle velocità, si è adottata un'espressione del coefficiente complessivo di viscosità cinematica del tipo:

$$v = 0.1 h u_* = 0.1 h \sqrt{ghS_f} \quad (4)$$

3.2.3 Il Metodo dei Volumi Finiti

Ognuna delle equazioni (1) viste sopra, esprimenti rispettivamente la conservazione della massa di miscuglio, nonché la conservazione della sua quantità di moto, può essere riscritta nella seguente forma generale

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial y} = S(U) \quad (5)$$

la quale esprime, in forma differenziale, un principio di conservazione (per esempio di massa oppure di quantità di moto). La variabile U è la variabile conservata, mentre f e g sono i flussi della variabile conservata lungo x e y rispettivamente, e S è un termine sorgente. In questa scrittura l'accento è posto proprio sul fatto che le variazioni della quantità conservata nel volumetto elementare (idealmente, di misura nulla) dipendono dai flussi fisici di quantità conservata che si realizzano in corrispondenza delle pareti del volumetto stesso, e pertanto tale forma si dice divergente (giacchè l'insieme delle derivate spaziali al primo membro possono essere espresse in termini di divergenza di un opportuno vettore \vec{F}) e conservativa. Scritture alternative sono possibili derivando i flussi rispetto alla variabile conservata, ottenendo formulazioni quasi-lineari come la seguente:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial g(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial y} = S(U) \quad (6)$$

La forma conservativa e la forma quasi-lineare sono solo apparentemente equivalenti, in quanto la seconda, in presenza di discontinuità della soluzione, conduce a valutazioni errate della celerità di propagazione dello shock e della sua intensità (per una discussione del problema, si veda Hirsch, 1988). Una espressione più fondamentale dei principi di conservazione viene ottenuta facendo riferimento non alla forma divergente, ma alla forma integrale, valida in regioni di dimensione finita del piano:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} U d\Omega + \oint_{\Gamma(t)} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma = \int_{\Omega(t)} S d\Omega \quad (7)$$

L'equazione appena scritta esprime il fatto che la variazione della quantità conservata U all'interno di un volume di controllo, di misura finita Ω , eventualmente mobile nello spazio, deve essere messa in relazione con i termini sorgente S nonché con il flusso fisico $\vec{F} \equiv (f \ g)$ che attraversa le pareti del volume di controllo. Espresso in questa forma, il principio di conservazione vale ovunque e comunque, indipendentemente dal fatto che la soluzione sia continua o meno: in particolare, si osserva che, nella validità delle ipotesi di continuità e derivabilità, l'applicazione del teorema di Gauss conduce con naturalezza dalla Equazione (7) alla Equazione (5).

Se particolarizziamo l'Equazione (7) al caso in cui l'i-esimo volume di controllo non cambi forma e posizione nello spazio, si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_i} U d\Omega + \oint_{\Gamma_i} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma = \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (8)$$

Il Metodo dei Volumi Finiti è un procedimento di discretizzazione di sistemi di equazioni differenziali esprimendo principi di conservazione, che consiste nel tassellare il dominio fisico con volumi di controllo di misura Ω_i , che d'ora in avanti considereremo poligoni non sovrapposti aventi contorno di misura Γ_i , nei quali si forza il rispetto degli stessi principi di conservazione, espressi nella forma integrale dell'Equazione (8).

Per potere operativamente procedere con la discretizzazione, bisogna approssimare in qualche maniera ognuno degli integrali che appaiono nell'equazione appena scritta. A questo proposito, osserviamo che il valore medio \bar{U}_i della quantità conservata U nell'i-esimo volume di controllo è definibile come

$$\bar{U}_i = \frac{1}{\Omega_i} \int_{\Omega_i} U d\Omega \quad (9)$$

Pertanto il principio di conservazione espresso in forma integrale dall'Equazione (8) mette in relazione la quantità media della variabile conservata in ogni volume di controllo con i termini sorgente nello stesso volume di controllo e i flussi attraverso i suoi contorni secondo la:

$$\Omega_i \frac{d\bar{U}_i}{dt} = - \oint_{\Gamma_i} \hat{n} \cdot \vec{F} d\Gamma + \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (10)$$

Tenendo conto del fatto che, di norma, i volumi di controllo adottati hanno una forma poligonale, l'integrale di circuitazione al secondo membro dell'Equazione (10) assume il seguente aspetto

$$\Omega_i \frac{d\bar{U}_i}{dt} = - \sum_j \int_{C_j} \hat{n}_j \cdot \vec{F}_j d\Gamma + \int_{\Omega_i} S d\Omega \quad (11)$$

ove la sommatoria è estesa a ognuno dei lati che compongono il perimetro dell'i-esimo volume di controllo.

Consegue che, se fosse disponibile un'espressione dei due integrali a secondo membro dell'Equazione (11) come funzione collettiva del valore medio delle variabili conservate nei volumi di controllo, si otterebbe un sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite $\bar{U}_i = \bar{U}_i(t)$ che potrebbe essere risolto con un opportuno algoritmo di marcia nel tempo (approccio semi-discreto).

La soluzione del sistema formato dalle Equazioni (11), al variare dell'indice i , viene usualmente rappresentata da una funzione polinomiale U_i^k di grado k della posizione nel volume di controllo i -esimo, che viene ricostruita a partire dall'insieme dei valori medi \bar{U}_i : se non viene forzata la continuità della ricostruzione nel passare da un volume di controllo all'altro, è possibile portare in conto discontinuità che eventualmente insorgono nella soluzione, almeno all'interfaccia tra i volumi di controllo. In particolare, nel caso in cui il grado del polinomio usato per la ricostruzione sia nullo, si ammette che in ogni punto del volume di controllo la soluzione coincida con il valore medio nello stesso volume di controllo.

La scelta fatta, nel presente caso, è stata quella di adottare una rappresentazione della soluzione, nei distinti volumi di controllo, proprio tramite polinomi di grado zero. La perdita di accuratezza rispetto a ricostruzioni di grado superiore è resa poco sensibile dalla rapidità con cui si sviluppano i fenomeni che si intende modellare, ed è ampiamente compensata dall'aumento in robustezza del modello numerico (Denlinger & Iverson, 2001): quest'ultima osservazione è decisiva, nel momento in cui il prodotto, piuttosto che essere utilizzato nel settore della ricerca, è invece adottato in campo tecnico da strutture pubbliche ai fini delle loro attività di controllo e di supporto a professionisti esterni.

Dato che il flusso fisico tra le celle è una funzione dei valori della variabile conservata in corrispondenza dei contorni dei volumi di controllo, anch'esso in generale ammette una discontinuità in corrispondenza di tali contorni: ciò, tuttavia, contrasta con il rispetto del principio di conservazione in forma discreta, il quale presuppone che quanto esce da un volume di controllo attraverso le sue interfacce in un dato intervallo di tempo, entri nei volumi di controllo circonvicini che condividono con la prima cella le stesse interfacce. Il Metodo dei Volumi Finiti forza tale principio imponendo ad ogni livello temporale che il flusso uscente da una cella sia uguale al flusso entrante nelle celle ad essa circonvicine, e dunque calcolando un valore univoco del flusso ad ogni interfaccia: ciò può essere fatto effettuando in maniera opportuna, con metodi che più avanti verranno chiariti, una media pesata dei due flussi fisici distintamente calcolati a partire dai valori della variabile conservata ricostruita ai lati dell'interfaccia. Il flusso così ottenuto si dice flusso numerico. Un'ulteriore proprietà che deve essere rispettata dal flusso numerico è quella di congruenza (Ghidaglia & Pascal, 2003): se i valori delle variabili conservative ai due lati dell'interfaccia, e che vengono usati per il calcolo dei flussi fisici ai due lati, sono uguali tra di loro, anche i flussi fisici devono essere uguali tra loro, ed il flusso numerico deve coincidere con essi.

In definitiva i passi che conducono all'applicazione del Metodo dei Volumi Finiti sono i seguenti (Lomax et al., 2001):

- 1) Dato l'insieme dei valori \bar{U}_i , mediati nelle celle, della variabile conservata, viene ricostruita una approssimazione polinomiale U_i^k alla soluzione in ognuna delle celle. Ai due lati di ogni interfaccia tra le celle vengono calcolati, attraverso opportune formule di quadratura, i flussi, in genere distinti.
- 2) Viene applicata una strategia per eliminare la discontinuità dei flussi all'interfaccia, ossia viene applicata una media di tali flussi, pesati in maniera opportuna.
- 3) In ogni volume di controllo, la somma dei flussi attraverso le sue interfacce con il termine sorgente fornisce la variazione nell'unità di tempo di \bar{U}_i .
- 4) Viene applicato un opportuno algoritmo per la soluzione del sistema di equazioni differenziali ordinarie nelle incognite $\bar{U}_i = \bar{U}_i(t)$ che così consegue.

Il grado di accuratezza, temporale e spaziale, della soluzione, dipende dal tipo di approssimazioni fatte per eseguire ognuno dei passi sopra tratteggiati.

3.2.4 Dettagli relativi alla griglia di calcolo adottata

Affinché sia possibile risolvere le equazioni bi-dimensionalili della conservazione con il metodo dei volumi finiti, è necessario tassellare il dominio fisico bi-dimensionale con un opportuno insieme di poligoni, rappresentanti i sotto-domini, non sovrapposti, in ognuno dei quali le variabili conservate vengono mediate, e in corrispondenza delle cui interfacce vengono calcolati i flussi delle quantità conservative. La qualità della tassellazione così ottenuta influenza la qualità del procedimento di soluzione numerica, in modo tale da non permettere di ritenere distinti i due momenti di produzione della mesh e applicazione del metodo di discretizzazione e soluzione: essi vanno riguardati come due passi, fortemente interagenti tra di loro, di un unico processo.

Una mesh, generata per la soluzione, ai volumi finiti o agli elementi finiti, di un sistema di equazioni differenziali di conservazione, deve godere di alcune desiderabili proprietà (Shewchuk, 1999):

- 1) deve adattarsi bene a geometrie eventualmente complesse, con contorni sia esterni che interni;
- 2) deve essere possibile effettuare un controllo, per quanto possibile accurato, delle dimensioni degli elementi della mesh, in modo da potere raffinare a piacere la discretizzazione in opportune zone del dominio fisico, eventualmente realizzando un passaggio graduale dagli elementi “grandi” agli elementi “piccoli”;

3) gli elementi con cui il piano viene tassellato devono essere, per quanto possibile, “rotondi”, in quanto elementi di forma allungata e poco equilibrata peggiorano la qualità della soluzione numerica.

La mesh formata dai poligoni che tassellano il dominio di calcolo si dice strutturata, se è possibile mettere in una relazione biunivoca i poligoni con gli elementi di una matrice rettangolare, altrimenti la mesh si dice non strutturata.

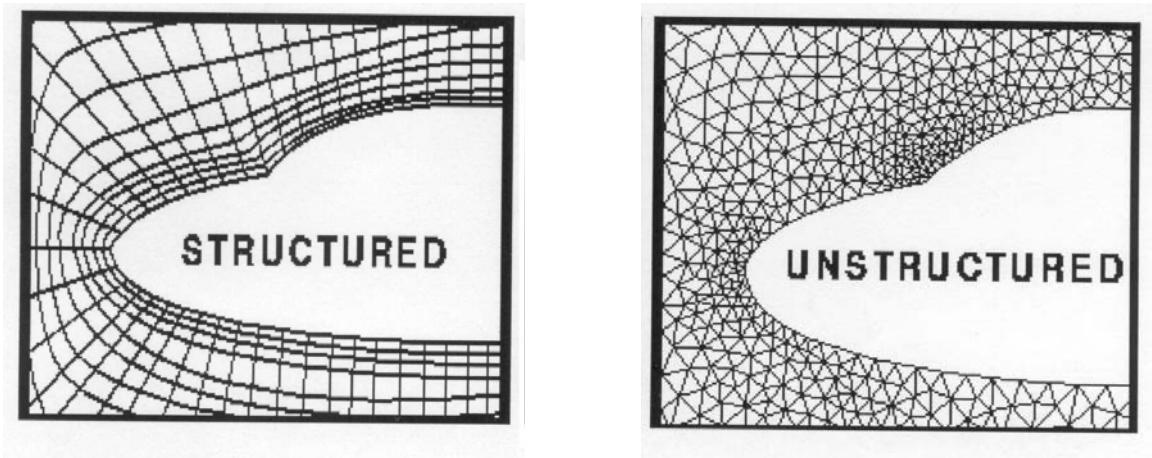


Figura 1. Esempi di mesh strutturata (a sinistra) e non strutturata (a destra).

Gli esempi recenti di utilizzo di mesh strutturate, rettangolari, nella soluzione ai volumi finiti delle Shallow-Water Equations, sono numerosissimi: tra i tanti, citiamo Fraccarollo & Toro (1995), Mingham & Causon (1998, 2000), Bradford & Katopodes (1999, 2002), Tseng (1999), Zoppou & Roberts (2000), Zhou et al. (2001), Bradford & Sanders (2002), Sanders (2002), Valiani, Caleffi & Zanni (2002), Caleffi, Valiani & Zanni (2003), Petti & Bosa (2004). La tecnica di utilizzo di mesh strutturate presenta, per certi versi, notevoli vantaggi derivanti dalla organizzazione piuttosto naturale della struttura dati, il che semplifica la logica del modello numerico, nonché dalla possibilità di fare riferimento a metodi di calcolo ottimizzati, che traggono vantaggio dalla organizzazione dei dati in traverse e colonne.

Di converso, le mesh strutturate presentano anche alcuni chiari svantaggi. Citiamo, ad esempio, la difficoltà di adattare in maniera soddisfacente la mesh strutturata a domini dal contorno frastagliato e di geometria complessa, quali sono quelli che si verificano in natura: alcuni ricercatori hanno risolto questo problema con un’approssimazione a gradini del contorno del dominio, introducendo quindi un errore anche notevole nella soluzione numerica in prossimità dei bordi (Bern & Eppstein, 1995).

Del resto, una mesh strutturata e regolare forza nella soluzione numerica un certo grado di anisotropia, per cui un fenomeno quale una corrente viene risolto molto bene se questa si muove lungo le traverse o le colonne della mesh, e piuttosto poveramente se si muove lungo le bisettrici.

Inoltre, le mesh strutturate con più difficoltà si prestano a procedure di veloce e generale infittimento della discretizzazione, e quindi sono meno adatte delle mesh non strutturate nei metodi di accelerazione della ricerca di soluzioni stazionarie quali quelli multigrid. Né è possibile, nelle mesh strutturate, integrare nella medesima tassellazione poligoni di forma diversa, in modo da adattare la discretizzazione alle caratteristiche locali del moto (ad esempio, nell'integrazione delle equazioni di Navier-Stokes, in corrispondenza del substrato laminare sono favorevoli elementi rettangolari schiacciati e paralleli alla parete, mentre lontano dalla parete sono più favorevoli elementi triangolari equilateri: Mavriplis, 2003).

Per i motivi citati, che possono fare preferire in taluni casi le mesh non strutturate, e sotto l'impulso della notevole letteratura disponibile nel campo dell'Ingegneria Aerospaziale per la soluzione delle equazioni di Eulero e di Navier-Stokes in domini di geometria complessa (rotori, turbine, profili alari), anche nel campo dell'Ingegneria Idraulica si è cominciato a porre attenzione alle mesh non-strutturate, ed in special modo a quelle triangolari: tra gli esempi recenti citiamo Bermudez et al. (1995), Anastasiou & Chan (1997), Sleigh et al. (1998), Hubbard (1999, 2001), Hubbard & Garcia-Navarro (2000), Roberts & Zoppou (2000), Brufau & Garcia-Navarro (2000), Komaei & Bechteler (2002, 2004), Chen et al. (2003), Yoon & Kang (2004). Tutte le ricerche citate sono esempi di soluzione ai volumi finiti delle equazioni dell'Idraulica, quali quelle del De Saint Venant, su mesh non strutturata triangolare. Zhao et al. (1994, 1996) affrontano il problema più generale di mesh non strutturata di forma qualsiasi.

Di grande popolarità hanno goduto, fin dalle prime applicazioni della Geometria Computazionale, le triangolazioni alla Delaunay, le quali possono essere ottenute, dato un qualsiasi insieme finito V di punti del piano, generando dapprima i poligoni di Voronoy corrispondenti a tale insieme di punti, e poi congiungendo i punti corrispondenti ai poligoni di Voronoy che condividono uno spigolo (Figura 2).

E' possibile dimostrare (proprietà di equiangolarità, o MaxMin) che, tra tutte le triangolazioni di un dato insieme V di vertici, quella di Delaunay massimizza il minimo angolo. Inoltre, è possibile dimostrare che, tra tutte le triangolazioni di un dato insieme V di vertici, quella di Delaunay minimizza il massimo circumcerchio.

Sono, in particolare, queste due ultime proprietà a rendere favorevole l'uso delle triangolazioni alla Delaunay come mesh non strutturate: la proprietà MaxMin citata assicura che una triangolazione alla Delaunay rende, per quanto possibile, i triangoli equilateri, mentre la seconda proprietà assicura che le dimensioni dei triangoli siano uniformi.

Va da sé che la reale bontà di una triangolazione, pure se questa è alla Delaunay, dipende dalla scelta iniziale dei punti V del piano da triangolare: più nel dettaglio, si desidera che la

triangolazione sia ottima nel senso che i suoi elementi rispettino opportune misure di qualità, e questo problema è oggetto di un'intensa attività di ricerca.

I modelli numerici oggetto della presente relazione fanno uso delle mesh triangolari alla Delaunay generate da un programma non commerciale, EASYMESH, liberamente disponibile in Internet. Tale programma permette di infittire con grande facilità la griglia di calcolo, senza aggravio per i tempi di generazione, e senza la necessità di creare dei blocchi interni nei quali generare mesh locali, dove la geometria del dominio fisico è più tormentata, o dove si suppone che la soluzione presenti i gradienti maggiori.

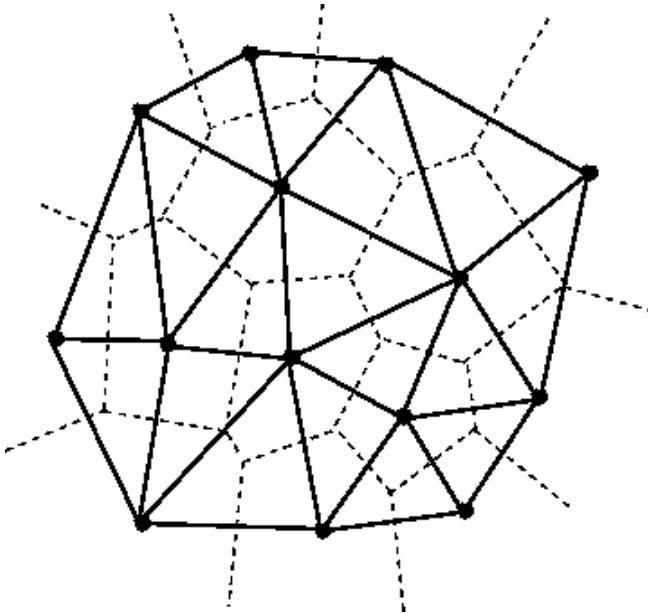


Figura 2. Triangolazione alla Delaunay e diagramma di Voronoy.

Alcuni notevoli esempi di algoritmo di generazione di una griglia triangolare alla Delaunay, e con la loro applicazione alla soluzione, con il metodo dei volumi finiti, di sistemi di equazioni differenziali iperboliche o paraboliche, esperimenti principi di conservazione, sono contenuti negli articoli di Barth & Jespersen (1989), Mavriplis (1991), e Anderson (1992).

3.2.5 Calcolo dei flussi intercella

I flussi intercella che compaiono nelle equazioni (1) hanno una componente convettiva (dipendente dalla differenza di spinta totale a cavallo dell'interfaccia), e una componente dispersiva, proporzionale al gradiente delle componenti della velocità a cavallo dell'interfaccia.

La presenza di flussi convettivi, in assenza di dispersione, conferisce natura iperbolica al sistema di equazioni differenziali che si intende risolvere. In tali condizioni, l'informazione si muove nel campo di moto con celerità finita: questo consente di determinare dove è possibile e necessario

disporre le condizioni al contorno appropriate affinchè il sistema di equazioni differenziali abbia una soluzione univocamente determinata.

Anche se sono presenti flussi convettivi, la presenza di flussi dispersivi conferisce sempre, tuttavia, natura parabolica al problema, per cui qualunque disturbo venga imposto al problema propaga i suoi effetti istantaneamente in ogni punto del campo di moto. Ma la teoria delle equazioni paraboliche dominate dalla convezione non è così sviluppata come quella delle equazioni iperboliche e delle equazioni paraboliche a flussi solo dispersivi: per questo motivo, si ammette usualmente di potere risolvere i problemi dominati dalla dispersione valutando separatamente i flussi di natura convettiva e i flussi di natura dispersiva con i metodi numerici più appropriati, e di considerare il flusso totale semplicemente come la somma dei due distinti tipi di flusso.

3.2.6 Calcolo dei flussi convettivi

Nelle applicazioni idrauliche, per la valutazione dei flussi convettivi nei modelli ai volumi finiti, è sempre più diffuso il metodo di Godunov (*Toro*, 1997). In base ad esso, si riconosce esplicitamente che le quantità conservative nelle (1) vanno considerate costanti all'interno di una cella, con formazione di una discontinuità nel passaggio attraverso l'interfaccia tra due celle (stati sinistro e destro): ciò comporta che, localmente, il problema della valutazione dei flussi coincide con la valutazione dei flussi in corrispondenza della discontinuità iniziale di un problema alla Riemann. La soluzione di questo problema differenziale può essere perseguita tramite l'uso di un solutore approssimato, previa linearizzazione locale del problema

Nel caso bi-dimensionale si può, del resto, opportunamente sfruttare la proprietà di invarianza rotazionale delle *Shallow water equations* (Zhao et al., 1994) per ridursi al caso di soluzione di un problema di Riemann localmente monodimensionale. Sia, dunque, $\hat{n} = (n_x \quad n_y)^T$ il versore normale al contorno del volume di controllo i-esimo, diretto verso l'esterno, e T la corrispondente matrice di rotazione, definita come

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (12)$$

La proiezione del vettore delle variabili conservative $\vec{U} = (h \quad hU \quad hV)^T$ nel riferimento *Ont*, avente asse n parallelo ed equiverso a \hat{n} , e asse t formante con n un riferimento levogiro, è data da

$$\vec{U}' = T \cdot \vec{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & n_y \\ 0 & -n_y & n_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ hU \\ hV \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ h(U n_x + V n_y) \\ h(-U n_y + V n_x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h \\ hU' \\ hV' \end{pmatrix} \quad (13)$$

essendo U' e V' le componenti del vettore velocità $\vec{q} = (U \ V)^T$ nel riferimento *Ont*. In particolare, $U' = U n_x + V n_y$ è la componente di \vec{q} parallela a n , mentre $V' = -U n_y + V n_x$ è la componente ortogonale a n .

Pertanto, se si considerano i soli flussi convettivi lungo x e y, rispettivamente,

$$\begin{cases} \vec{f}_c(\vec{U}) = \begin{pmatrix} hU & hU^2 + g \frac{h^2}{2} & hUV \end{pmatrix}^T \\ \vec{g}_c(\vec{U}) = \begin{pmatrix} hV & hUV & hV^2 + g \frac{h^2}{2} \end{pmatrix}^T \end{cases} \quad (14)$$

è facile dimostrare che la componente del vettore dei flussi convettivi $\vec{F}_c = (\vec{f}_c \ \vec{g}_c)$ diretta lungo la normale al contorno è esprimibile come

$$\vec{F}_{cn} = \vec{F}_c \cdot \hat{n} = T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} hU' \\ hU'^2 + g \frac{h^2}{2} \\ hU'V' \end{pmatrix} = T^{-1} \cdot \vec{f}_c(\vec{U}') = T^{-1} \cdot \vec{f}_c \cdot \quad (15)$$

Nell'equazione (15) appena scritta il vettore \vec{f}_c , definito dalle Equazioni (14), ed esprimente il flusso convettivo del vettore delle quantità conservative \vec{U} attraverso una retta del piano avente normale parallela all'asse x, viene calcolato in corrispondenza del vettore \vec{U}' . Se ne deduce formalmente che il problema del calcolo del flusso attraverso una curva avente normale \hat{n} qualsiasi si riduce, in un opportuno riferimento locale, al calcolo del flusso per un modello uni-dimensionale aumentato, come è espresso dall'Equazione (15).

Ricordando che la rappresentazione scelta per la soluzione è tale per cui le variabili conservative e primitive possono essere considerate costanti in ognuna delle celle, e avendo osservato che i flussi convettivi in corrispondenza dell'interfaccia tra le celle possono essere calcolati in maniera analoga a quelli di un opportuno sistema di equazioni differenziali iperboliche uni-dimensional, si consideri il seguente problema al valor iniziale:

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{U})}{\partial x} = 0 \\ x \geq 0 \Rightarrow \vec{U}(x,0) = \vec{U}_R \\ x < 0 \Rightarrow \vec{U}(x,0) = \vec{U}_L \end{cases} \quad (16)$$

dove sono state fatte le posizioni

$$\vec{U} = (h \ hU \ hV)^T \quad (17)$$

$$\vec{f}(\vec{U}) = \left(hU \ hU^2 + g \frac{h^2}{2} \ hUV \right)^T$$

Le Equazioni (16), stante la posizione (17), sono l'equivalente uni-dimensionale delle Shallow Water Equations o, più appropriatamente, il sistema che da queste si ottiene se si suppongono nulle le derivate lungo y .

In Figura 3 è rappresentato graficamente la condizione iniziale del problema in esame.

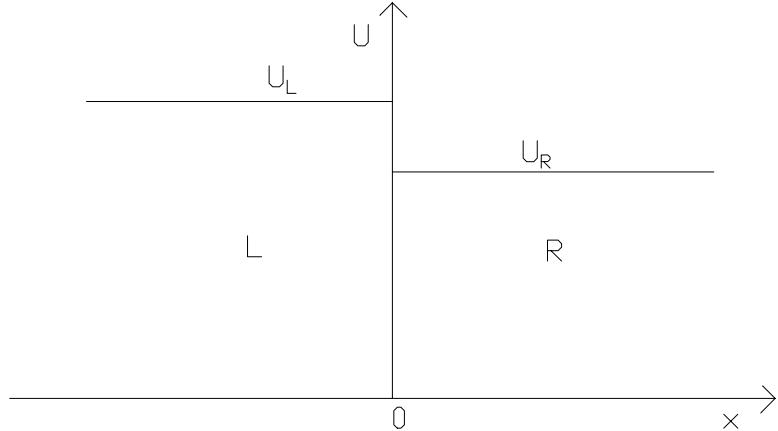


Figura 3. Condizione iniziale corrispondente al problema di Riemann.

Nel piano Oxt è possibile rappresentare (si veda la Figura 4), le caratteristiche uscenti dall'origine del piano, e con riferimento alle condizioni iniziali descritte dalle Equazioni (16). In particolare si osserva come siano presenti 4 regioni (L, L_*, R_*, R), del piano Oxt nelle quali \vec{U} è costante, separate dalle curve caratteristiche (assimilate a rette, dato che il problema viene linearizzato localmente, avendo assunto passi temporali di avanzamento nel tempo sufficientemente piccoli) cui corrispondono le celerità S_L, S_M e S_R . Per le celerità viste vale sempre, per posizione, $S_R \geq S_M \geq S_L$. Più nel dettaglio, si verifica la seguente situazione:

$$\begin{cases} L: & h = h_L; U = U_L; V = V_L \\ L_*: & h = h_*; U = U_*; V = V_L \\ R_*: & h = h_*; U = U_*; V = V_R \\ R: & h = h_R; U = U_R; V = V_R \end{cases} \quad (18)$$

L'onda di mezzo, cui corrisponde la celerità S_M , è tale per cui attraverso di essa le quantità h e hU si conservano, ma non hV , e pertanto essa non può essere un'onda di shock o di rarefazione, ma è legata esclusivamente alle discontinuità di hV , ossia di V : tale tipo di discontinuità si dice di contatto. A cavallo della discontinuità di contatto le celerità immediatamente a destra e a sinistra sono uguali. Viceversa, le onde collegate con le celerità estreme possono essere anche onde di compressione (shock) o di rarefazione.

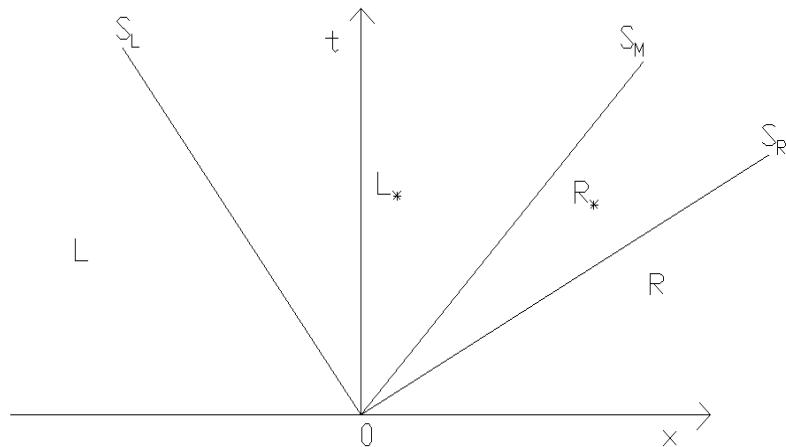


Figura 4. Struttura delle onde relativa alle Shallow Water Equations unidimensionali.

Per valutare il flusso all'interfaccia ($x=0$) tra le celle, bisogna considerare la soluzione del problema di Riemann in corrispondenza di $x=0$ per $t > 0$, e dunque di fatto bisogna valutare in quale delle regioni a stato costante, per $t > 0$, si trovi immerso l'asse dei tempi (corrispondente a $x=0$).

Quando $S_L \geq 0$, l'asse dei tempi è compreso nella regione sinistra, denotata con L , e pertanto il flusso numerico viene semplicemente posto pari a $\vec{f}_L = \vec{f}(\vec{U}_L)$: questo è il caso in cui il flusso è tutto dominato dall'informazione proveniente da sinistra, il che significa che la corrente è veloce, e proviene da sinistra. Viceversa, quando $S_R < 0$, l'asse dei tempi è compreso nella regione destra, denotata con R , e pertanto il flusso numerico viene semplicemente posto pari a $\vec{f}_R = \vec{f}(\vec{U}_R)$: la corrente è veloce da destra. Tutte le altre condizioni sono di corrente lenta, e possono essere trattate come segue.

Si supponga che i due stati centrali siano assimilabili con un unico stato, senza riguardo alla presenza della discontinuità corrispondente alla caratteristica relativa alla celerità intermedia. In questo caso è possibile (Batten et al., 1997) approssimare la soluzione nella regione intermedia tra le due celerità estreme come

$$\vec{U}^* = \frac{S_R \vec{U}_R - S_L \vec{U}_L - (\vec{f}_R - \vec{f}_L)}{S_R - S_L} \quad (19)$$

Questa soluzione va intesa come mediata nella regione intermedia, in quanto non tiene conto del fatto che tale regione sia composta a sua volta di due stati costanti. Ad essa corrisponde il flusso

$$\vec{f}^* = \frac{S_R \vec{f}_L - S_L \vec{f}_R - S_L S_R (\vec{U}_R - \vec{U}_L)}{S_R - S_L} \quad (20)$$

Si ha, dunque, il seguente schema

$$\begin{cases} S_L \geq 0 \Rightarrow \vec{f}^* = \vec{f}_L \\ S_L < 0 \leq S_R \Rightarrow \vec{f}^* = \frac{S_R \vec{f}_L - S_L \vec{f}_R - S_L S_R (\vec{U}_R - \vec{U}_L)}{S_R - S_L} \\ S_R \leq 0 \Rightarrow \vec{f}^* = \vec{f}_R \end{cases} \quad (21)$$

Il metodo mostrato per il calcolo dei flussi si dice HLL, dalle iniziali di Harten, Lax e van Leer, che per primi lo hanno proposto, e permette di catturare in maniera accurata gli shock, oltre a godere di buone proprietà di convergenza. (Fraccarollo & Toro, 1995; Toro, 1999).

Il procedimento delineato, e cioè la riduzione della soluzione delle Shallow Water Equations alla soluzione di un insieme di problemi uni-dimensional locali, è reso necessario dal fatto che l'applicazione dei metodi di Godunov alla soluzione di problemi uni-dimensional locali è molto più avanzata di quella relativa a problemi genuinamente multidimensionali. Va da sé che, in tal modo, viene introdotto un errore che è tanto maggiore quanto maggiore è lo scostamento locale del vettore velocità rispetto alla normale al lato: tale errore, tuttavia, si riduce a piacere diminuendo le dimensioni della griglia.

Come visto, la valutazione dei flussi nel metodo di HLL può essere fatta solo a valle di una valutazione delle celerità estreme S_L e S_R . A questo proposito si osserva che, in generale, per un sistema iperbolico di m equazioni in m incognite, la soluzione del problema di Riemann è composta da $m+1$ stati costanti del tipo \vec{U}_k , con $k = 0, 1, 2, \dots, m$, separati da onde cui corrispondono le celerità $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, ordinate in senso crescente.

In particolare si è già visto che, nel caso delle equazioni uni-dimensional (16) e (17) associate alle Shallow-water Equations, sono presenti tre onde ($m=3$), di cui la centrale è caratterizzata dalla celerità $\lambda_2(\vec{U}) = U$, mentre le onde estreme sono caratterizzate rispettivamente dalle celerità

$\lambda_1(\vec{U}) = U - \sqrt{gh}$ e $\lambda_3(\vec{U}) = U + \sqrt{gh}$. Ovviamente, tale valutazione può essere utile nel caso di soluzione continua, anche se non nelle derivate. Nel caso di discontinuità della soluzione le celerità assumerebbero due distinti valori a cavallo di ognuna delle discontinuità, ed in generale potrebbe verificarsi uno dei tre seguenti casi:

- 1) $\lambda_k(\vec{U}_{k-1}) = \lambda_k(\vec{U}_k)$, e si avrebbe una discontinuità di contatto, che si muove alla velocità λ_k (ed è il caso che si verifica nell'equazione della pura convezione uni-dimensionale);
- 2) $\lambda_k(\vec{U}_{k-1}) < \lambda_k(\vec{U}_k)$, e si avrebbe un'onda di rarefazione, rappresentante una transizione continua tra gli stati a cavallo dell'onda;
- 3) $\lambda_k(\vec{U}_{k-1}) > \lambda_k(\vec{U}_k)$, e si avrebbe un'onda di shock, che si muove con velocità s tale che $\lambda_k(\vec{U}_{k-1}) > s > \lambda_k(\vec{U}_k)$.

Nel caso delle Equazioni (16) e (17) la discontinuità centrale è sempre di contatto, come già visto in precedenza. Una scelta del tipo

$$\begin{cases} S_L = \lambda_1(\vec{U}_L) \\ S_R = \lambda_3(\vec{U}_R) \end{cases} \quad (22)$$

in grado di maggiorare le celerità nel caso di onde di rarefazione, comporterebbe una sottostima sistematica delle celerità nel caso di onde di shock, e non sarebbe assicurata la stabilità dell'algoritmo, specie se esplicito.

A questo proposito è stata suggerita la correzione

$$\begin{cases} S_L = \min[\lambda_1(\vec{U}_L), \lambda_1(\vec{U}_R)] \\ S_R = \max[\lambda_3(\vec{U}_L), \lambda_3(\vec{U}_R)] \end{cases} \quad (23)$$

la quale tuttavia è poco accurata, e conduce a notevole diffusione numerica, in quanto sovrastima in maniera eccessiva le celerità. Nella pratica è invalso l'uso (Fraccarollo & Toro, 1995; Mingham & Causon, 1998, 2000; Caleffi et al., 2002; Valiani et al., 2002) di valutare in maniera approssimata, tramite la conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema dato dalle Equazioni (16) e (17), i valori di h e U nella regione intermedia. Si ha dunque (Toro, 1999)

$$\begin{cases} R_L^+ = R_*^+ \Rightarrow U_L + 2\sqrt{gh_L} = U_* + 2\sqrt{gh_*} \\ R_R^- = R_*^- \Rightarrow U_R - 2\sqrt{gh_R} = U_* - 2\sqrt{gh_*} \end{cases} \quad (24)$$

cui conseguono le relazioni

$$\begin{cases} U_* = \frac{U_R + U_L}{2} + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R} \\ \sqrt{gh_*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) + \frac{1}{4}(U_L - U_R) \end{cases} \quad (25)$$

ed in definitiva l'algoritmo

$$\begin{cases} S_L = \min[\lambda_1(\vec{U}_L), \lambda_1(\vec{U}_*)] \\ S_M = U_* \\ S_R = \max[\lambda_3(\vec{U}_*), \lambda_3(\vec{U}_R)] \end{cases} \quad (26)$$

La sovrastima che, in tal caso, si verifica rispetto alle celerità vere delle discontinuità, è meno accentuata di quella che si ha per mezzo delle Equazioni (23), e pertanto si ha una minore diffusione numerica.

Si osserva che l'ipotesi di conservazione degli invarianti di Riemann attraverso la struttura delle onde del problema può, a rigore, essere applicata solo nel caso di onde di rarefazione e discontinuità di contatto, ma non nel caso di onde di shock, per le quali deve valere la condizione di Rankine-Huguniot. Pertanto, nel caso in cui sia presente uno shock, l'errore commesso sulle variabili comprese nella regione intermedia potrebbe essere rilevante. Si osserva, tuttavia, che lo scopo del procedimento non è stimare in maniera affidabile h_* e U_* , ma stimare (possibilmente per eccesso, ai fini di garantire la stabilità numerica dell'algoritmo) le celerità estreme, in modo da potere calcolare i flussi numerici: l'esperienza (Fraccarollo & Toro, 1995) dimostra che con il procedimento mostrato questo obiettivo viene raggiunto.

Quel che più da vicino interessa l'oggetto di questa relazione è la possibilità di estendere in maniera naturale l'algoritmo HLL per la valutazione dei flussi a cavallo tra celle che sono l'una bagnata (in quanto ad essa è associata un'altezza di corrente non nulla) e l'altra asciutta (in quanto ad essa è associata un'altezza di corrente minore di un valore di soglia). In tal modo è esplicitamente possibile portare in conto la propagazione di un fronte d'onda di colata rapida su un fondo precedentemente asciutto.

In effetti, contrariamente a quanto accade per altri solutori approssimati del problema di Riemann, è sufficiente cambiare, per trattare questa condizione, le espressioni che consentono di ricavare la celerità delle caratteristiche uscenti dalla discontinuità iniziale. In tal caso si ha, in ossequio alla soluzione del problema di Ritter di rimozione istantanea di una paratoia in un canale rettangolare orizzontale privo di attrito:

$$\begin{cases} S_L = U_L - \sqrt{gh_L} \\ S_M = S_R \\ S_R = U_L + 2\sqrt{gh_L} \end{cases} \quad (27)$$

per cella destra asciutta, mentre si ha

$$\begin{cases} S_L = U_R - 2\sqrt{gh_R} \\ S_M = S_L \\ S_R = U_R + \sqrt{gh_R} \end{cases} \quad (28)$$

per cella sinistra asciutta.

Dato che i volumi di controllo considerati hanno forma triangolare, il calcolo dei termini sorgente relativi alla pendenza del fondo viene fatta considerando l'espressione analitica del piano passante per i vertici dell'elemento. Ciò può essere fatto se è nota la quota dei vertici di ogni elemento: in caso contrario, si può procedere mediante interpolazione lineare, a partire da un modello digitale del terreno costruito con il programma commerciale SURFER®.

3.2.7 Calcolo dei flussi dispersivi

Al fine di valutare i flussi dispersivi attraverso l'interfaccia tra i volumi di controllo, è necessario approssimare le due componenti del gradiente, lungo x e lungo y rispettivamente, della velocità $\vec{q} = (U \ V)^T$, nonché il valore di h e v , al centro dell'interfaccia. Ciò è stato eseguito adottando il procedimento descritto da Anastasiou e Chan (1997), e che può essere riassunto come segue.

Data l'interfaccia cavallo tra due celle, si considera il parallelogrammo a cavallo di essa, i cui vertici A e B sono rappresentati dagli estremi dell'interfaccia nonché dai baricentri C e D dei due volumi di controllo separati dallo spigolo comune. Attraverso un procedimento di media pesata sulla distanza, eseguita a partire dai valori delle variabili primitive collocate nei baricentri di tutte le celle triangolari che hanno A e B in comune, è possibile conoscere i valori delle variabili primitive in A e B rispettivamente.

Interpolando tra A e B è possibile, in primo luogo, conoscere i valori di h , U e V al centro dell'interfaccia. Successivamente, è possibile calcolare il gradiente di U e V nei due triangoli BAC e DAC (pendenza del piano passante per tre punti): il valore del gradiente di U e V a cavallo dell'interfaccia AB tra le due celle viene calcolato facendo una media pesata, sulla misura delle aree, dei gradienti calcolati nei triangoli BAC e DAC .

3.2.8 Avanzamento nel tempo

Una volta discretizzati i flussi numerici e i termini sorgente in funzione delle variabili conservate nelle celle, il problema rappresentato dalle (11) si riduce al problema della soluzione di un sistema di equazioni differenziali ordinarie (con il tempo t che è la variabile indipendente): a tale riguardo, nei casi oggetto di studio, si è fatto riferimento al semplice metodo esplicito di Eulero, preciso al primo ordine. Esso è soggetto ad una condizione di stabilità (condizione di Courant), che limita il passo temporale in funzione della celerità di propagazione delle discontinuità e del passo spaziale.

3.3 Descrizione del modello uni-dimensionale

Adottando lo stesso approccio già introdotto per il modello bi-dimensionale, anche in questo caso si scrivono, in forma integrale, le equazioni di conservazione della massa e della quantità di moto del miscuglio.

$$\Delta x \frac{d\vec{q}}{dt} + \sum_{j=1}^2 f(\vec{q}) = \Delta x \vec{b}(\vec{q}) \quad (29)$$

dove

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} \sigma \\ Q \end{bmatrix}; \vec{f}(\vec{q}) = \begin{bmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{\sigma} + K g \sigma \zeta \end{bmatrix}; \vec{b}(\vec{q}) = \begin{bmatrix} 0 \\ g \sigma (S_o - S_f) \end{bmatrix} \quad (30)$$

sono, rispettivamente, i vettori delle quantità conservative, dei flussi all'interfaccia e dei termini sorgente. Nelle equazioni (9) e (10), gli ulteriori simboli introdotti hanno il seguente significato: σ = area della sezione trasversale della corrente; Q = portata defluente in alveo; Δx = lunghezza della cella; ζ = affondamento, al di sotto della superficie di pelo libero, del baricentro della sezione trasversale. Anche in questo caso, la valutazione delle resistenze al moto viene eseguita facendo uso dell'equazione (5), nella quale $W = Q/\sigma$ è la velocità media di portata. Analogamente, la valutazione dei flussi convettivi all'interfaccia tra le celle e l'avanzamento nel tempo vengono eseguiti con le modalità già indicate per il modello bi-dimensionale. Per quanto riguarda l'uso del modello, va fatto infine presente che, allo scopo di aumentare l'accuratezza dei calcoli, si è provveduto a dotare il modello stesso di uno specifico algoritmo che, a partire dalle sezioni per le quali risultano effettivamente noti i parametri geometrici, consente, attraverso una modellazione tridimensionale delle superfici laterali e la loro intersezione con piani verticali ubicati a prefissata distanza dalla sezione più a monte, di infittire a piacere il numero di sezioni di calcolo.

4. ALCUNI DEI RISULTATI RODOTTI DALL'UNITÀ OPERATIVA

Con riferimento ai modelli numerici precedentemente descritti, e alle loro applicazioni, il gruppo di ricerca coordinato dal primo degli scriventi ha già provveduto a produrre numerose pubblicazioni a stampa, riportate sia in atti di convegni nazionali e internazionali che su riviste internazionale (Papa et al., 2003; Barbiero et al., 2002; Pianese & Barbiero, 2003; Cozzolino et al., 2003; Iavarone et al., 2003; Barbiero et. al., 2004; Pianese & Barbiero, 2004). Rinviando, per la puntuale e precisa descrizione dei vari approcci adottati, delle modifiche via via apportati agli stessi e dei risultati, alle specifiche memorie prodotte dal gruppo di ricerca, nelle pagine che seguono si sintetizzano solo alcuni dei risultati ottenuti e che, a parere degli scriventi, appaiono rivestire maggiore significatività dal punto di vista tecnico.

4. 1 Valutazione, attraverso modellazione matematica uni- e bi-dimensionale dei fenomeni di moto vario, delle interazioni tra correnti detritiche e briglie frangi-colata.

Nell’ambito dello sviluppo di una metodologia d’analisi dei fenomeni di propagazione di correnti sia idriche che fangose, finalizzata alla pianificazione di interventi a difesa di aree abitate poste a valle di fossi e di valloni, è stata effettuata una comparazione tra i risultati forniti da due modelli, uni- e bi-dimensional di moto vario. Il confronto mostra come, in relazione alle azioni che possono andare ad esplicarsi su opere trasversali del tipo “briglia frangi-colata”, non sussista una relazione sistematica tra i risultati conseguibili con l’applicazione, ad uno stesso caso di studio, dei due tipi di modelli, e sia quindi consigliabile, soprattutto nel più frequente caso di utilizzazione di modelli unidimensionali, provvedere alla progettazione di opere sufficientemente duttili e, pertanto, capaci di scaricare sull’intera struttura le azioni che, il più delle volte, tendono ad esplicarsi soprattutto su alcune parti di esse.

A questo proposito, si può prendere a riferimento i caso-studio costituiti da Vallone di Mezzo e Vallone Casapepe (Comune di Monitoro Inferiore, provincia di Avellino). Gli interventi a difesa delle frazioni poste immediatamente a valle di tali valloni possono essere così riassunti: nel tratto di vallone posto più a monte, è realizzata una briglia frangi-colata, necessaria per assorbire il violento impatto della colata, per ridurne l’energia cinetica e per realizzare un accumulo immediatamente a monte della briglia; a tale briglia di testata segue una serie di briglie secondarie, necessarie per ostacolare la ripartenza della colata, una volta che questa sia stata rallentata dalla prima briglia; il sistema di difesa è poi completato da una o più vasche pedemontane, di capacità idonea, in grado di favorire lo spagliamento e l’arresto della colata, e di impedire che quest’ultima possa dirigersi verso le zone abitate ubicate più a valle.

Nella Figura 5 vengono confrontati gli andamenti, nel tempo, delle spinte totali (somma della componente statica e della componente dinamica) esercitate sulla briglia di testata di Vallone di Mezzo, così come determinate in base ai modelli uni-dimensionale e bi-dimensionale, rispettivamente. A tale scopo, si fa presente che, nel caso del modello bi-dimensionale, la componente dinamica della spinta è stata valutata sommando, lungo l'intera sezione della briglia, le componenti normali delle spinte agenti sulle singole strisce verticali. Come può osservarsi, le spinte totali calcolate con il modello uni-dimensionale arrivano ad ammontare fino a circa il 65% in più di quelle calcolate con il modello bi-dimensionale

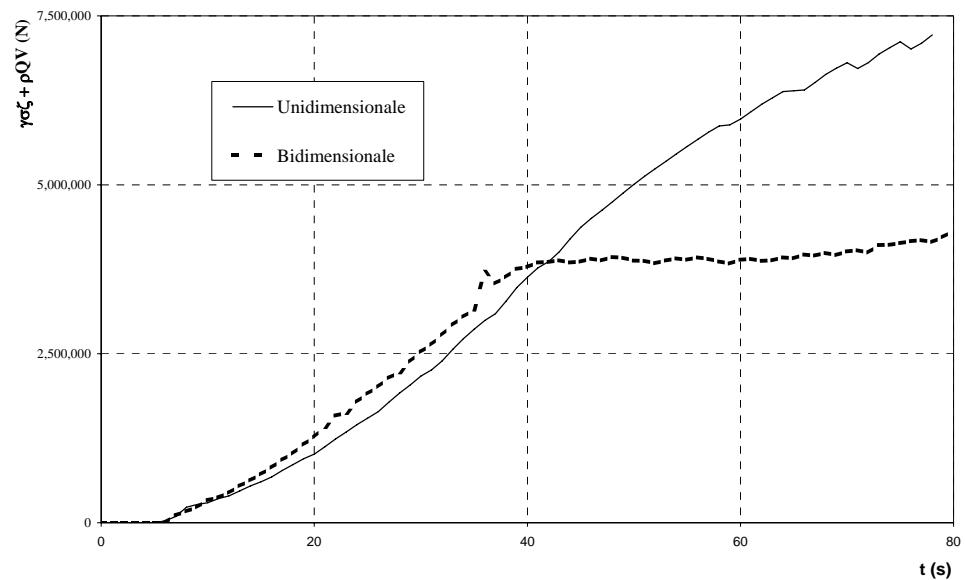


Figura 5. Vallone di Mezzo: confronto tra gli andamenti temporali della spinta totale, così come individuate, rispettivamente, in base ai modelli uni- e bi-dimensionale

Nella Figura 6 sono rappresentati gli andamenti temporali delle spinte totali (dinamica più statica) agenti sulla briglia di testata, come calcolate nei due modelli nel caso di Vallone Casapepe. Come può osservarsi, nel caso in esame, gli andamenti delle spinte totali valutate con i due modelli appaiono sostanzialmente simili. Tuttavia, diversamente da quanto accade per il Vallone di Mezzo, nel caso in esame sono le spinte calcolate con il modello bi-dimensionale a risultare maggiori, con valori fino al 25% in più di quelli calcolati con il modello uni-dimensionale.

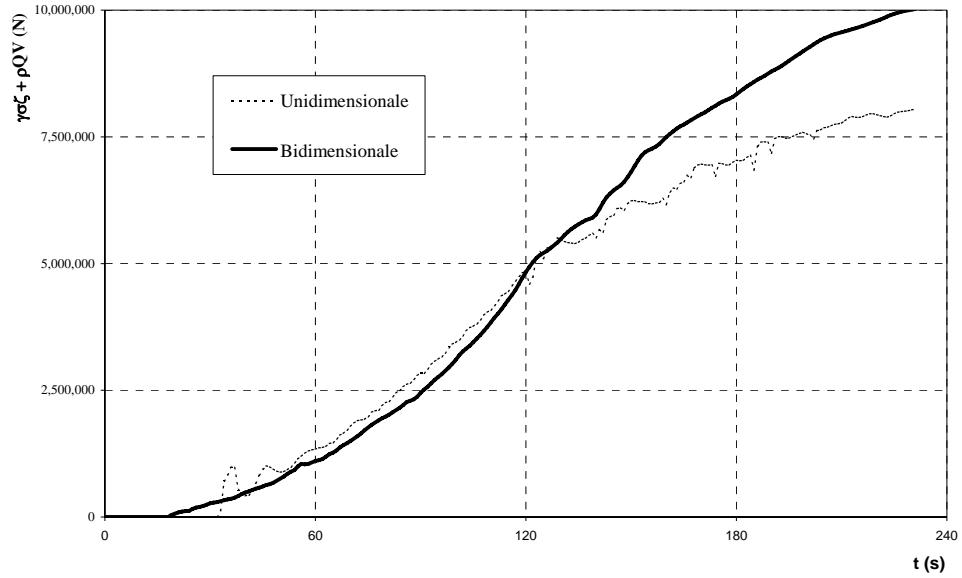


Figura 6. Vallone Casapepe: confronto tra gli andamenti temporali della spinta totale, così come individuate, rispettivamente, in base ai modelli uni- e bi-dimensionale

4. 2 Criteri di dimensionamento di un particolare dispositivo di dissipazione dell’energia posseduta dalle colate di fango.

Sono state svolte numerose analisi numeriche su un particolare dispositivo di contenimento degli effetti delle colate di fango, costituito da una fila di blocchi rigidi a sezione quadra, disposti trasversalmente rispetto alla direzione della corrente. Nell’ipotesi di omogeneità del fluido, di inerodibilità delle pareti e del fondo del canale nel quale si muove la corrente, e di ipercriticità di quest’ultima, è stato possibile mostrare come la spinta esercitata dalle colate sul sistema di blocchi e l’energia dissipata in corrispondenza dei blocchi stessi dipendano, principalmente, da tre parametri: il numero di Froude della corrente “indisturbata” a monte del dissipatore; la pendenza del canale; la frazione della larghezza della sezione del canale effettivamente occupata dai blocchi. I risultati trovati, e riportati con dettaglio nella bibliografia sopra citata, lungi dall’essere definitivi, sono costituiti da formule che, se usate con giudiziosa cautela, permettono il dimensionamento di massima di tale tipo di dissipatori e, inoltre, possono rendere più economica, e meglio indirizzata, la sperimentazione di laboratorio.

Per esempio, con riferimento alla perdita adimensionalizzata di energia specifica in corrispondenza dei blocchi si è ottenuto

$$\varepsilon = \frac{E_1 - E_2}{h_1} = \frac{F_1^2}{2 \cos^2 \vartheta} \left(1 - \frac{1}{Y^2} \right) + (1 - Y) \cos^2 \vartheta \quad (31)$$

ove $Y = \frac{h_2}{h_1} = \lambda Y_t$ è il rapporto tra le altezze della corrente a monte e a valle del sistema di blocchi.

Vale, in particolare, che

$$Y_t = \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + 8 \frac{F_1^2}{\cos^2 \vartheta (1 + \xi)}} \right) \quad (32)$$

e

$$\lambda = \cos^2 \vartheta (1 + \xi) \left[-0.92(1 + \xi) + 1.88 \right] \cdot \left[\frac{F_1^2}{\cos^2 \vartheta (1 + \xi)} \right]^{\cos^2 \vartheta (1 + \xi) [0.67(1 + \xi) \cos^2 \vartheta - 1.21]} \quad (33)$$

essendo ϑ l'angolo che il fondo del vallone fa con il piano orizzontale, e $\xi = \frac{nb}{B}$ il rapporto tra sezione occupata dai blocchi e larghezza della corrente, F_1 il numero di Froude della corrente di monte.

Con riferimento alla massima delle spinte esercitate sul sistema di blocchi, si ha, invece

$$P_{cal} = \frac{1}{2} C_{Rcal} g b h_1^2 F_1^2 \quad (34)$$

ove

$$C_{Rcal} = (36.56 \cos^2 \vartheta - 32.17) \left[\frac{F_1^2}{\cos^2 \vartheta (1 + \xi)} \right]^{-6.27 \cos^2 \vartheta + 5.85} \quad (35)$$

La varianza dei punti “sperimentali” rispetto alle leggi interpolari trovate fa, tuttavia, supporre che una reologia quale quella alla Herschel-Bulkley, tipica dei materiali fangosi, introduca effetti distorsivi, rispetto alla similitudine di Froude, a qualsiasi scala, e tali da rendere probabilmente necessario, a causa degli effetti viscosi, il contemporaneo soddisfacimento della similitudine alla Reynolds, per il tramite di un numero di Reynolds opportunamente definito (Komatina e Dordevic, 2004), e della similitudine alla Froude. Si ritiene che questa linea di ricerca sia particolarmente significativa, e meritevole di ulteriori approfondimenti.

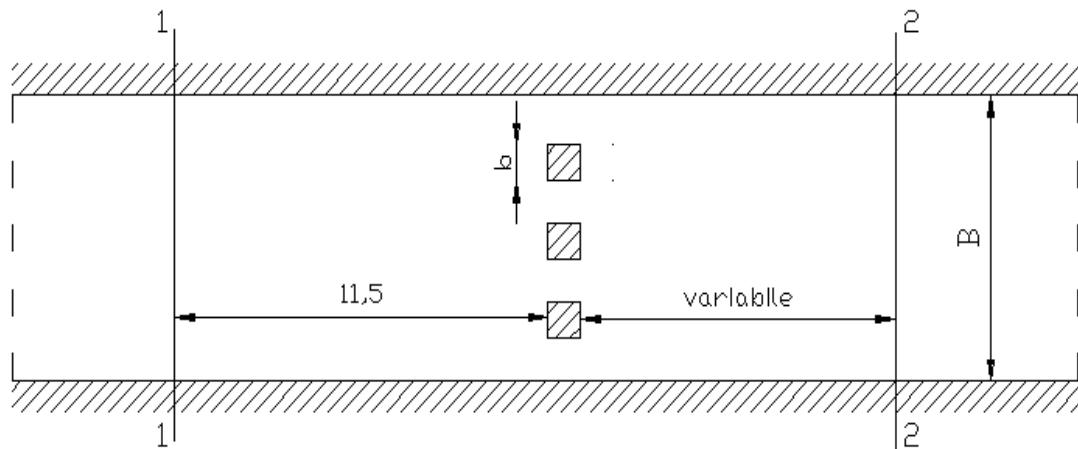


Figura 7. Sistema di dissipazione ad una fila di blocchi.

Riferimenti Bibliografici

- Anastasiou H. & Chan C. T. (1997), "Solution of the 2D Shallow water equations using the finite volume method on unstructured triangular meshes", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24: 1225-1245
- Anderson W. K. (1992), "Grid generation and flow solution method for Euler equations on unstructured grids", NASA TM 42-95, NASA Langley Research Center
- Barbiero L., Della Morte R. & Pianese D. (2002), "Modellazione bidimensionale dell'interazione tra correnti detritiche e strutture di controllo", *Giornata di Studio in Onore di Lucio Taglialatela*, Napoli 24 maggio.
- Barbiero, L., Cozzolino, L., Iavarone, V., & Pianese D. (2004), "Valutazione, attraverso modellazione uni- e bi-dimensionale dei fenomeni di moto vario, delle interazioni tra correnti detritiche e briglie frangi-colata", Workshop MODECI, 30-31 marzo 2004 (in corso di stampa)
- Barth T. J. & Jespersen D. C. (1989), "The design and application of upwind schemes on unstructured meshes", AIAA Paper 89-0366
- Batten P., Clarke N., Lambert C. & Causon D.M. (1997), "On the choice of wavespeeds for the HLLC Riemann solver", SIAM Journal of Scientific Computing, 18(6): 1553-1570
- Bermudez A., Dervieux A., Desideri J.A. & Vazquez M.E. (1995), "Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes", INRIA, Raport de Recherche 2738
- Bern M. & Eppstein D. (1995), "Mesh generation and optimal triangulation, in Du & Hwang eds., Computing in Euclidean geometry", World Scientific
- Bradford S.F. & Katopodes N.D. (1999), "Hydrodynamics of turbid underflows. I: Formulation and numerical analysis", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 125(10): 1006-1015
- Bradford S.F. & Katopodes N.D. (2002), "Finite volume model for nonlevel basin irrigation", ASCE Journal of Irrigation and Drainage Engineering, 127(4): 216-223
- Bradford S.F. & Sanders S.F. (2002), "Finite-volume model for shallow-water flooding of arbitrary topography", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 128(3): 289-298
- Brufau P. & García-Navarro P. (2000), "Two-dimensional dam break flow simulation", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 33: 35-57

- Caleffi V., Valiani A. & Zanni A. (2002), "Finite volume method for simulating extreme floods events in natural channels", IAHR Journal of. Hydraulic Researrch, 41(2): 167-177
- Chen, C.L. (1988). "Generalized viscoplastic modeling of debris flow". Journal of Hydraulic Engineering, ASCE 114 (3): 237-258
- Chen, C.L. & Ling, C.H. (1997). "Resistance formulas in hydraulic-based models for routing debris-flows". In C.L. Chen (ed.), Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction, and Assessment; Proceedings 1st International DFHM Conference, San Francisco, CA, USA, August 7-9, 1997: 360-372. N.Y.: ASCE.
- Chen C., Liu H. & Beardsley R.C.. (2003), "An unstructured grid, finite-volume, three-dimensional, primitive equations ocean model: application to coastal ocean and estuaries", Journal of Atmospheric and Ocean Technology, 20(1): 159-186
- Cozzolino L., Barbiero L., Della Morte R. & Pianese D. (2003), "Criteri di dimensionamento di alcuni dispositivi di dissipazione dell'energia di colate", Giornate di Studio sulla Protezione Idraulica del Territorio, Trieste, 10-12 settembre (in corso di stampa)
- Cozzolino L., & Pianese D. (2005), "Finite volume modelling of water quality changes in shallow watee bodies". Submitted for presentation to XXXI IAHR International Congress. Seoul, Korea (in corso di stampa)
- Denlinger R.P. & Iverson R.M. (2001), "Flow of variably fluidised granular masses across the three-dimensional terrain. 2. Numerical predictions and experimental tests", EGU Journal of Geophysical Research, 106(B1):553-566
- Fraccarollo L. & Toro E. F. (1995), "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems", IAHR Journal of. Hydraulic Researrch, 33(6): 843-864
- Ghidaglia J.M. & Pascal F. (2003), "On boundary conditions for multidimensional hyperbolic systems of conservation laws in the finite volume framework". Report CMLA, ENS Cachan
- Han G. & Wang D. (1996), "Numerical modeling of Anhui debris-flow", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 122(5):262-265
- Hirsch C. (1988), Numerical computation of internal and external flows. Volume 1: Fundamentals of numerical discretization, Wiley
- Hubbard M. E. (1999), "Multidimensional slope limiters for MUSCL-type finite volume schemes on unstructured grids", Journal of Computational Physics, 155: 54-74
- Hubbard M. E. (2001), "On the accuracy of one-dimensional models of steady converging /diverging open channel flows", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 35: 785-808
- Hubbard M. E. & Garcia-Navarro P. (2000), "Flux difference splitting and the balancing of source terms and flux gradients", Journal of Computational Physics, 165: 89-125
- Iavarone V., Barbiero, L., Cozzolino, L., & Pianese D. (2003), "Sull'utilizzazione di modelli di uni- e bi-dimensionali per la valutazione delle azioni indotte, su opere trasversali, da fenomeni di colata rapida", Giornate di Studio sulla Protezione Idraulica del Territorio, Trieste, 10-12 settembre (in corso di stampa)
- Komaei S. & Bechteler W. (2002), "An implicit scheme for the two-dimensional shallow water equations using unstructured meshes", in Bousmar & Zech eds., RiverFlow 2002, Lisse
- Komaei S. & Bechteler W. (2004), "An improved, robust implicit solution for the two dimensional shallow water equations on unstructured grids", in Greco, Caravetta & Della Morte eds., RiverFlow 2004, London
- Komatina D. & Dordevic D. (2004), "Numerical simulation of hyper-concentrated flows", in Greco, Caravetta & Della Morte eds., RiverFlow 2004, London
- Lomax H., Pulliam T.H. & Zingg D.W. (2001), Fundamentals of Computational Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlino
- Mavriplis D. J. (1991), "Turbulent flow calculations using unstructured and adaptive meshes", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 13: 1131-1152

- Mingham C.G. & Causon D.M. (1998), "High-resolution finite-volume method for shallow water flows", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 124(6): 605-614
- Mingham C.G. & Causon D.M. (2000), "Calculation of unsteady bore diffraction using a high resolution finite volume method", IAHR Journal of. Hydraulic Researsch, 38(1): 49-56
- O'Brien J.S., Julien P.Y. & Fullerton W.T. (1993), "Two-dimensional water flood and mudflow simluation", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 119(2):244-261.
- Petti M. & Bosa S. (2004), "Pollution transport in the lagoon of Grado e Marano: a two-dimensional modelling approach", in Greco, Caravetta & Della Morte eds., RiverFlow 2004, London.
- Papa, M., Iavarone, V., e Pianese, D. (2001). 'Modellazione matematica dei fenomeni di propagazione delle colate di fango e di detriti.' Atti del "Forum per il Rischio Idrogeologico in Campania". Facoltà di Ingegneria dell'Università degli Studi di Napoli Federico II. Napoli, 22 giugno 2001, pp. 84-104.
- Pianese D. & Barbiero L. (2003), "Formulation of a two-dimensional unsteady debris-flow model for analysis of debris-flow hazards and countermeasures thereof", *Proceedings of the Third International Conference on Debris-Flow Hazards Mitigation: Mechanics, Prediction, and Assessment*, Davos, Switzerland, Vol. 1.
- Pianese D. & Barbiero L. (2003), Discussion of "Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method" by Valiani, A., Caleffi, V., & Zanni A., ASCE, *Journal of Hydraulic Engineering*, 130, 941-944
- Roberts S. & Zoppou C. (2000), "Robust and efficient solution of the 2D shallow water equation with domains containing dry beds", ANZIAM Journal, 42(C): C1260-C1282
- Sanders B.F. (2002), "Non-reflecting boundary flux for finite volume shallow-water models", *Advances in Water Resources*, 25: 195-202
- Shewchuk J. R. (1999), Lecture notes on Delaunay mesh generation, Univ. of California, Berkeley (CA).
- Sleigh P. A., Gaskell P. H., Berzins M. & Wright N. G. (1998), "An unstructured finite-volume algorithm for predicting flow in rivers and estuaries", Computer & Fluids, 27(4): 479-508
- Toro E.F. (1999), Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics, Springer-Verlag, Berlin
- Tseng M. (1999), "Explicit finite volume non-oscillatory schemes for 2D transient free-surface flows", International Journal for Numerical Methods in Fluids, 30: 831-843
- Valiani A., Caleffi V. & Zanni A. (2002), "Case study: Malpasset dam-break simulation using a two-dimensional finite volume method", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 128(5): 460-472
- Yoon T. H.. & Kang S. (2004), "Finite volume model for two-dimensional shallow water flows on unstructured grids", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 130(7): 678-688
- Zhao D. H., Shen H. W., Lai J. S. & Tabios III G. Q. (1996), "Approximate Riemann solvers in FVM for 2D hydraulic shock wave modelling", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 130(7): 678-688
- Zhao D. H., Shen H. W., Tabios III G. Q., Lai J. S. & Tan W. Y. (1994), "Finite-volume two-dimensional unsteady-flow model for river basins", ASCE Journal of Hydraulic Engineering, 120(7): 863-883
- Zhou J. G., Causon D.M., Mingham C.G. & Ingram D.M. (2001), "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations", Journal of Computational Physics, 168: 1-25
- Zoppou C. & Roberts S. (2000), "Numerical solution of the two-dimensional unsteady dam break", Applied Mathematical Modeling, 24: 457-475