

Convegno Nazionale

LA MITIGAZIONE DEL RISCHIO DA COLATE DI FANGO

a Sarno e negli altri Comuni colpiti dagli eventi del maggio 1998

Napoli, 2 e 3 Maggio 2005 - Sarno 4 e 5 Maggio 2005

TRATTAMENTO NATURALE DEI TERMINI SORGENTE NELLA SOLUZIONE AI VOLUMI FINITI DELLE SHALLOW-WATER EQUATIONS

L. Cozzolino, C. Mucherino & D. Pianese

Università di Napoli Federico II, Dipartimento di Ingegneria Idraulica e Ambientale G.Ippolito;
lcozzoli@unina.it, mucherin@unina.it, pianese@unina.it

SOMMARIO

Nella presente memoria viene discusso un approccio per la soluzione delle Shallow-Water Equations col Metodo dei Volumi Finiti nel quale, ai fini del trattamento compatibile dei flussi intercella e dei termini sorgente, viene resa esplicita la differenza sussistente tra le celle parzialmente bagnate, in quanto soggette a bagnatura da parte di celle che si trovano a quota topografica maggiore (definite come dam-break type), e le celle parzialmente bagnate soggette a bagnatura da parte di celle che si trovano a quota topografica minore (flooding type). Vengono mostrati, inoltre, alcuni esempi di applicazione del metodo, che si dimostra promettente per il trattamento di situazioni idrodinamiche caratterizzate da contorni mobili.

1 INTRODUZIONE

Le Shallow-Water Equations, le quali possono essere ottenute, nell'ipotesi che la distribuzione delle pressioni sia idrostatica e che le accelerazioni verticali siano trascurabili, tramite l'integrazione lungo la verticale delle equazioni di Reynolds, hanno dimostrato notevoli capacità di descrivere, in modo efficace, il moto in corpi idrici superficiali a sviluppo prevalentemente bi-dimensionale. Nell'ipotesi di potere trascurare l'effetto di flussi viscosi turbolenti e dispersivi, e con lo scopo di portare in conto, in maniera adeguata, la presenza di discontinuità quali risalti, è necessario considerare (Hou T.Y, LeFloch P., 1994) la seguente forma differenziale conservativa delle equazioni di bilancio di massa e quantità di moto:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hU}{\partial x} + \frac{\partial hV}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial hU}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(g \frac{h^2}{2} + hU^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (hUV) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial x} - \frac{\tau_{bx}}{\rho} \\ \frac{\partial hV}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hUV) + \frac{\partial}{\partial y} \left(g \frac{h^2}{2} + hV^2 \right) = -gh \frac{\partial z_b}{\partial y} - \frac{\tau_{by}}{\rho} \end{cases} \quad (1)$$

Nelle equazioni (1), t è la variabile temporale; h è l'altezza locale della corrente; U e V sono le componenti locali della velocità, mediata sulla verticale, lungo gli assi orizzontali x e y , rispettivamente; z_b è la quota di fondo, supposta fissa nel tempo; g è l'accelerazione di gravità; τ_{bx} e τ_{by} sono le componenti, lungo x e y , della forza resistente al fondo, per unità di peso. Viene qui adottata, per semplicità, allo scopo di esprimere gli sforzi resistenti, la classica formulazione di Strickler:

$$\tau_{bx} = gh\rho \frac{U\sqrt{U^2 + V^2}}{K_{St}^2 h^{4/3}}; \quad \tau_{by} = gh\rho \frac{V\sqrt{U^2 + V^2}}{K_{St}^2 h^{4/3}} \quad (2)$$

In letteratura sono documentati diversi problemi numerici che sono connessi, nei modelli numerici su griglia fissa, con l'attingimento di tiranti molto bassi in corrispondenza delle zone ove si alternano fenomeni di asciugatura (*drying*) e bagnatura (*wetting*), e consistenti in difficoltà nel rispetto della condizione di compatibilità tra termini sorgente e flussi, tiranti negativi, valori eccessivi di velocità e resistenze al moto. I provvedimenti che, quindi, comunemente vengono presi per la soluzione di questi problemi sono: l'uso di un valore di soglia ε_h del tirante al di sotto del quale le Shallow-Water Equations non si applicano (Bradford S.F., Sanders B.F., 2002); modifica parziale delle equazioni di conservazione della quantità di moto, in corrispondenza del fronte (Akanbi A.A., Katopodes N.D., 1988); ridefinizione locale della topografia del fondo (Brufau P. et al., 2002); uso di formule di quadratura adeguate per la ridefinizione dei flussi idrostatici (Komaei S., Bechteler W., 2004; Cozzolino L., Pianese D., 2004). Tanto premesso, in questa memoria viene presentato un modello numerico per la soluzione delle Shallow-Water Equations basato sul metodo dei volumi finiti, su griglia non strutturata triangolare. I flussi all'interfaccia tra le celle vengono valutati con una versione semplificata del solutore approssimato del problema di Riemann detto HLLC (Fracarollo L., Toro E.F., 1995). La formula di quadratura utilizzata per l'approssimazione dei flussi idrostatici è tale da assicurare l'equilibrio con i termini sorgente in condizione di acqua in quiete. Particolare attenzione viene data alla definizione di celle bagnate e celle parzialmente bagnate, al fine di permettere l'applicazione delle equazioni del moto anche ove la superficie di pelo libero interseca la superficie topografica. In particolare, mutuando l'approccio già utilizzato, nell'ambito di modelli agli elementi finiti, da Bates P.D. e Hervouet J. (1999), le celle parzialmente bagnate sono, a loro volta, distinte in celle soggette a fenomeni assimilabili a quelli di *dambreak*, e celle soggette a fenomeni assimilabili a quelli di *flooding*. Vengono, infine, riportati i risultati di alcuni test eseguiti con il modello numerico, al fine di esplorarne le possibilità e validarne i risultati.

2 DESCRIZIONE DEL MODELLO NUMERICO

2.1 Generalità

Il sistema di equazioni iperboliche (1)-(2) può essere riscritto nella notazione vettoriale

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{f}(\vec{U})}{\partial x} + \frac{\partial \vec{g}(\vec{U})}{\partial y} = \vec{S}(\vec{U}) \quad (3)$$

nella quale il significato dei simboli è il seguente: \vec{U} = vettore delle quantità conservate; \vec{f} = vettore dei flussi lungo x ; \vec{g} = vettore dei flussi lungo y ; \vec{S} = vettore dei termini sorgente. Si supponga di avere discretizzato il dominio fisico bi-dimensionale con un insieme di N poligoni triangolari non sovrapposti, dei quali l' i -esimo ha area Ω_i , e contorno di lunghezza Γ_i . L'integrazione spaziale delle Equazioni (3), in ognuno dei volumi di controllo, eseguita secondo la tecnica dei Volumi Finiti, conduce a un sistema di equazioni differenziali ordinarie, nel quale la variazione nel tempo dei valori \vec{U}_i , mediati sui volumi di controllo, delle variabili conservate \vec{U} , è messa in relazione con i flussi attraverso le pareti dei volumi di controllo e i termini sorgente integrati negli stessi:

$$\Omega_i \frac{d\vec{U}_i}{dt} = - \oint_{\Gamma_i} \vec{F} \cdot \hat{n} d\Gamma + \int_{\Omega_i} \vec{S} d\Omega; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Al fine di integrare, per via numerica, il sistema di equazioni differenziali ordinarie (4), viene sfruttata la proprietà di invarianza rotazionale, per cui il problema bi-dimensionale di calcolo dei flussi attraverso l'interfaccia dei volumi di controllo può essere ridotto a un problema localmente uni-dimensionale. Pertanto, se $\hat{n} = \begin{pmatrix} n_x & n_y \end{pmatrix}$ è il versore normale all'interfaccia, cui corrisponde la matrice di rotazione T , definita come

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_x & -n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{pmatrix} \quad (5)$$

si può definire il vettore \vec{U}' delle variabili conservate nel riferimento locale con assi rispettivamente normale e parallelo all'interfaccia

$$\vec{U}' = T \cdot \vec{U} = \begin{pmatrix} h & hU' & hV' \end{pmatrix}^T \quad (6)$$

A loro volta, i flussi attraverso la generica interfaccia possono essere espressi come

$$\vec{F} \cdot \hat{n} = T^{-1} \cdot \vec{f}(\vec{U}') = T^{-1} \cdot \vec{f}' \quad (7)$$

e dunque, formalmente, in termini di flussi \vec{f}' delle variabili \vec{U}' conservate nel sistema locale. Il sistema (4) può, pertanto, essere riscritto come

$$\Omega_i \frac{d\vec{U}_i}{dt} = - \sum_{j=1}^{n_i} T_j^{-1} \cdot \int_{C_j} \vec{f}_j' d\Gamma + \int_{\Omega_i} \vec{S} d\Omega; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (8)$$

ove la sommatoria al secondo membro è estesa a tutti i lati, di lunghezza C_j , che compongono il contorno dell' i -esimo elemento poligonale costituente la mesh.

La rappresentazione della soluzione delle (8) è fatta in termini dei valori \vec{U}_i , mediati sulle celle, delle variabili conservate \vec{U} : ciò implica che, nel passare da un volume di controllo all'altro, attraverso l'interfaccia, si verifichi una brusca discontinuità nella rappresentazione della soluzione. Tale discontinuità si verifica, in generale, anche nel caso in cui le variabili conservate, oppure le variabili primitive, siano ricostruite all'interno di ognuna delle celle tramite opportune rappresentazioni polinomiali, le quali sono individuate a partire dai valori mediati delle variabili conservate. Questo implica che i flussi fisici a destra e a sinistra dell'interfaccia siano distinti tra loro: al fine di forzare il rispetto di un principio di conservazione in forma discreta bisogna approssimare il flusso intercella tramite un opportuno flusso numerico f^* , in genere distinto dai flussi destro e sinistro, ma uguale ad essi nel caso che questi coincidano tra loro. Ciò può essere fatto adottando un approccio alla Godunov (Toro E.F., 1997), il quale suggerisce di far corrispondere i flussi intercella con quelli relativi alla soluzione, in corrispondenza dell'origine del riferimento locale, di un problema di Riemann.

Al fine di attingere precisione al secondo ordine nel tempo per la soluzione delle (8), viene adottato un procedimento di tipo *predictor-corrector*. Per garantire la conservazione in forma discreta dell'algoritmo, non è necessario che anche il passo di predizione sia conservativo, bastando che lo sia, invece, il passo di correzione.

Per attingere precisione al secondo ordine nello spazio, viene eseguita la ricostruzione lineare delle variabili primitive $\zeta = h + z_b$, $U = hU/h$ e $V = hV/h$, all'interno di ognuna delle celle. In particolare, ciò implica la valutazione dei gradienti delle variabili primitive in ognuna delle celle, e questo viene eseguito con il procedimento descritto in Anderson W.K. e Bonhaus D.L. (1994), avendo collocato i valori medi delle variabili primitive in corrispondenza dei baricentri delle celle, il che è formalmente congruente con un ordine di precisione pari al secondo. Le variabili primitive, ricostruite all'interfaccia avendo fatto uso dei gradienti così approssimati, possono dare luogo all'insorgere di massimi e minimi spuri i quali, crescendo incontrollatamente, sono in grado di alterare gravemente la soluzione, al punto da instabilizzarla. Per questo motivo, è necessario operare la limitazione dei gradienti con una tecnica del tutto simile a quella descritta da Anastasiou H. e Chan C.T. (1997), la quale fa uso di un limitatore di gradiente dipendente da un coefficiente β compreso tra 1 e 2. In particolare, nel caso del modello numerico proposto, la quota di pelo libero ζ viene ricostruita in corrispondenza degli estremi dell'interfaccia, per poi essere confrontata con i valori medi della quota di pelo libero nelle celle a cavallo dell'interfaccia stessa, mentre le componenti U e V della velocità sono ricostruite in corrispondenza del punto medio dell'interfaccia. Il gradiente limitato di h viene

ottenuto, in ogni cella, a partire dal gradiente limitato di ζ , sommando a questo la pendenza del fondo.

Una volta noti i gradienti limitati delle variabili primitive, si può eseguire il passo predittivo con un procedimento alla Hancock (Bradford S.F., Sanders B.F., 2002), che permette di passare dal livello temporale n al livello temporale $n + 1/2$, intermedio tra n e $n + 1$. A tale proposito, basta riscrivere le equazioni (1) in forma non-conservativa, e operare la discretizzazione temporale alla Eulero con un passo temporale pari alla metà del passo temporale Δt complessivo:

$$\begin{aligned} h_i^{n+\frac{1}{2}} &= h_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[h_i^n \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right)_i^n + U_i^n \frac{\partial h}{\partial x}_i^n + V_i^n \frac{\partial h}{\partial y}_i^n \right] \\ U_i^{n+\frac{1}{2}} &= U_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[U_i^n \frac{\partial U}{\partial x}_i^n + V_i^n \frac{\partial U}{\partial y}_i^n + g \frac{\partial \zeta}{\partial x}_i^n + S_{fxi}^n \right] \\ V_i^{n+\frac{1}{2}} &= V_i^n - \frac{\Delta t}{2} \left[U_i^n \frac{\partial V}{\partial x}_i^n + V_i^n \frac{\partial V}{\partial y}_i^n + g \frac{\partial \zeta}{\partial y}_i^n + S_{fyi}^n \right] \end{aligned} \quad (9)$$

Nelle equazioni (9), il soprassegno sta a indicare che i gradienti sono limitati.

Eseguito il passo di predizione, e facendo ancora uso dei gradienti limitati precedentemente calcolati, è possibile ricostruire le variabili primitive in corrispondenza dell'interfaccia tra le celle. Più precisamente, le componenti U e V della velocità vengono ricostruite in corrispondenza del punto medio di ognuna delle interfacce, dai due lati, mentre la quota di pelo libero ζ viene ricostruita in corrispondenza degli estremi dell'interfaccia, ancora da entrambi i lati. Nota la quota di fondo z_b in corrispondenza degli estremi dell'interfaccia, l'altezza di corrente h in corrispondenza di tali estremi viene ottenuta per differenza rispetto alla quota di pelo libero. Il procedimento di ricostruzione dell'altezza di corrente a partire dalla ricostruzione della quota di pelo libero è più accurato della ricostruzione diretta di h (Surface Gradient Method: Zhou e al., 2001). Finalmente, note le variabili predette, in particolare alle interfacce, è possibile calcolare i flussi numerici e i termini sorgente e, quindi, eseguire il passo correttivo, dato dall'espressione:

$$\Omega_i \frac{\bar{U}_i^{n+1} - \bar{U}_i^n}{\Delta t} = - \sum_{j=1}^{n_i} T_j^{-1} \cdot \int_{C_j} \vec{f}^* \left(\bar{U}^{n+\frac{1}{2}} \right) d\Gamma + \int_{\Omega_i} \bar{S} \left(\bar{U}^{n+\frac{1}{2}} \right) d\Omega \quad (10)$$

2.2 Calcolo dei flussi e trattamento dei termini sorgente dovuti alla batimetria

La soluzione del problema di Riemann può essere perseguita facendo uso di una versione semplificata del solutore approssimato del problema di Riemann detto HLLC

(Fraccarollo L., Toro E.F., 1995), che permette di tenere esplicitamente conto anche dell'esistenza della discontinuità di contatto intermedia, cui compete la celerità s_M , oltre a quelle estreme, che possono essere sia di shock che di rarefazione, e alle quali competono, rispettivamente, le celerità s_L e s_R . Il calcolo delle celerità, da utilizzare per la valutazione dei flussi numerici, può essere fatto seguendo le indicazioni di Fraccarollo L. e Toro E.F. (1995) e, quindi, mettendole in funzione delle variabili primitive "a sinistra" e "a destra" dell'interfaccia tra le celle.

L'applicazione del solutore approssimato del problema di Riemann permette di approssimare il flusso \vec{f} per unità di lunghezza lungo l'interfaccia tra due celle, ma per conoscere i flussi complessivamente scambiati tra due celle attraverso la loro interfaccia bisogna eseguire gli integrali a secondo membro dell'equazione (10). Data la ricostruzione lineare delle variabili primitive, da un lato e dall'altro, lungo l'interfaccia tra le celle, e la forte non linearità dell'espressione delle celerità s_L, s_M e s_R in funzione delle variabili primitive, l'integrazione, in forma chiusa, di tali flussi, di fatto è impossibile. Tuttavia, se viene fatta l'approssimazione che le celerità siano uniformi lungo l'interfaccia tra le celle, il che è compatibile con un ordine di accuratezza dell'algoritmo pari al secondo, l'integrazione dei flussi fisici è semplice (Cozzolino L., Pianese D., 2004; Cozzolino L., 2005). In particolare, si osserva che se, in ognuna delle celle, le quote di fondo z_b sono note in corrispondenza dei vertici, e si ipotizza che varino linearmente tra questi, allora anche il tirante idrico h deve variare linearmente tra un vertice e l'altro, a destra e a sinistra dell'interfaccia: ciò comporta che i flussi fisici corrispondenti alle spinte idrostatiche siano calcolati come la spinta su una superficie piana di forma trapezia. Il termine sorgente dovuto alla pendenza del fondo lungo x , S_{oxi} , supposta costante nella cella, può, inoltre, essere calcolato, come

$$-\int_{\Omega_i} gh \frac{\partial z_b}{\partial x} d\Omega = g\Omega_i h_i S_{oxi} \quad (11)$$

Una formula simile deve valere per la pendenza lungo y . E' possibile mostrare che il trattamento dei termini sorgente e dei flussi, in particolare quelli idrostatici, soddisfa la proprietà di compatibilità in forma continua.

2.3 Problema di wetting e drying

Quanto visto fin qui vale, a rigore, solo per celle completamente bagnate. A questo proposito, può definirsi *bagnata* la cella per cui, se in essa la superficie di pelo libero fosse orizzontale, la corrente bagnerebbe ogni vertice, del quale si deve supporre nota la quota (Figura 1a). In tal caso, vale la seguente semplice relazione che lega altezza media della corrente nella cella e valore medio della quota di pelo libero:

$$\zeta_i = h_i + z_{Gi} \quad (12)$$

ove z_{Gi} è la quota di fondo in corrispondenza del baricentro della cella triangolare.

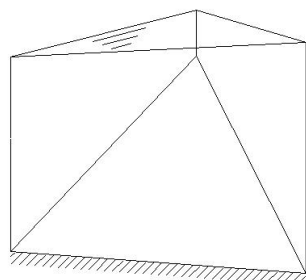


Figura 1a. Cella bagnata.

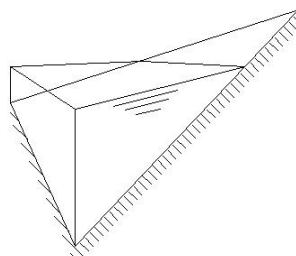


Figura 1b. Cella parzialmente bagnata.

Tuttavia, in un problema i cui contorni sono mobili, a causa delle escursioni di pelo libero, vi sono aree in cui il tirante idrico tende a zero, facendo perdere di significato alle Shallow-Water Equations: ciò si riverbera sull'algoritmo numerico, per il quale si possono verificare problemi di instabilità conseguenti alla divisione per un numero prossimo a zero che si verificherebbe, nel caso della valutazione di velocità e delle resistenze al moto, nelle celle con tirante molto piccolo. Conseguenze come sia necessario introdurre celle *asciutte*, nelle quali non è né necessario né corretto andare a valutare le equazioni del moto e, in particolare, nelle quali non è possibile eseguire il passo di predizione definito dall'equazione (9). Con un approccio simile a quello di Bradford S.F. e Sanders B.F. (2002), viene, dunque, definito un valore di soglia ε_h per h_i , al di sotto del quale la cella si considera asciutta: i valori di tale soglia sono stati fatti variare, nella fase di verifica del modello numerico, tra 10^{-2} e 10^{-14} m, mostrando che il parametro ha una notevole influenza nel determinare la stabilità complessiva dell'algoritmo, in dipendenza di pendenza, celerità dei fenomeni, dimensioni di griglia e passo temporale. I flussi di massa e quantità di moto attraverso i lati della griglia a cavallo tra due celle asciutte sono nulli per definizione.

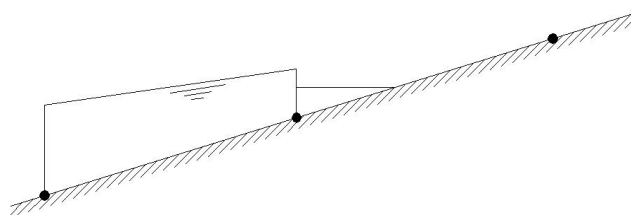


Figura 2. Celle bagnate e parzialmente bagnate *flooding* (a sinistra e destra, rispettivamente).

Per approssimare la soluzione del problema di *wetting-drying*, è possibile definire come celle *parzialmente bagnate* quelle per cui il valore medio della quota di pelo libero non è maggiore della massima tra le quote dei vertici dell'elemento (Figura 1b). Al fine di discriminare se una cella, nella quale è nota l'altezza media h_i della corrente, sia parzialmente bagnata, basta calcolare la quota media del pelo libero con la formula (12), la quale viene successivamente confrontata poi con la massima tra le quote relative ai vertici della cella. Determinate le celle parzialmente bagnate, si può introdurre anche

nel Metodo dei Volumi Finiti, con le ovvie modifiche, l'approccio indicato da Bates P.D. e Hervouet J. (1999) per il loro modello agli Elementi Finiti, e distinguere le celle parzialmente bagnate in celle del tipo *flooding* e celle del tipo *dambreak*. Diremo, dunque, del tipo *flooding* (Figura 2) le celle, parzialmente bagnate, tali che la massima, tra le quote di pelo libero delle celle circostanti, è inferiore alla massima tra le quote di fondo dei vertici della cella: in tal caso il pelo libero, all'interno della cella, viene considerato orizzontale. La ricerca di tale quota di pelo libero può essere condotta facilmente se è nota l'altezza media h_i della corrente all'interno della cella, ossia il volume d'acqua contenuto, nonché la quota dei suoi vertici, supponendo di calcolare il volume della cella a partire dal suo vertice a quota inferiore. Diremo, invece, del tipo *dambreak* le celle, parzialmente bagnate, per le quali esiste una cella, tra quelle circostanti, nella quale il valore medio della quota di pelo libero è maggiore della massima tra le quote dei vertici della cella. Contrariamente alla rappresentazione fatta per le celle del tipo *flooding*, nelle celle parzialmente bagnate del tipo *dambreak* ogni lato è completamente bagnato. Contrariamente alle celle bagnate, nelle celle del tipo *flooding* non avviene alcuna ricostruzione, e nel calcolo dei flussi viene utilizzato il valore medio delle variabili primitive, mentre nelle celle del tipo *dambreak* vengono ricostruite U , V , e h , al posto di ζ .

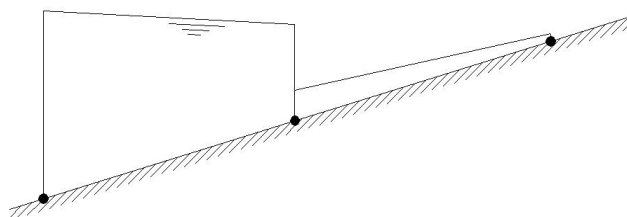


Figura 3. Celle bagnate e parzialmente bagnate *dambreak* (a sinistra e destra, rispettivamente).

Si osserva che in una cella del tipo *flooding* due dei lati sono parzializzati dalla superficie di pelo libero, mentre il terzo può essere asciutto oppure completamente bagnato. Ciò suggerisce di dividere il lato parzializzato in corrispondenza del punto di intersezione della quota di pelo libero con il fondo, e di calcolare, separatamente, flussi fisici e sistemi di celerità sulle due porzioni di lato così ottenute: il flusso numerico totale è somma dei flussi numerici calcolati sulle due porzioni di lato. L'approccio qui proposto è, dunque, simile a quello proposto da Komaei S. e Bechteler W. (2004), costituendone, tuttavia, un'estensione.

3 VALIDAZIONE DEL MODELLO NUMERICO

Vengono di seguito riportati alcuni test numerici utili per esplorare la capacità del modello di riprodurre la corretta soluzione delle Shallow-water Equations anche in presenza di topografia complessa. Il primo test è relativo al confronto tra la soluzione numerica fornita dal modello proposto e la soluzione analitica che si ha per l'onda risonante in un bacino parabolico a simmetria circolare, privo di attrito. La quota di

fondo z_b del bacino parabolico è descrivibile dall'equazione

$$z_b(r) = -h_o \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \quad (15)$$

ove r è la distanza del generico punto dal centro del bacino. Il parametro h_o rappresenta l'affondamento del centro del bacino parabolico al di sotto del piano $z = 0$, mentre a rappresenta la distanza, dal centro del bacino, in corrispondenza della quale la quota del fondo si annulla. Se la condizione iniziale è di acqua con velocità nulla, e quota di pelo libero avente andamento pure parabolico, e descritto dall'equazione

$$\zeta_o(r) = h_o \left[\sqrt{\frac{1+A}{1-A}} - 1 - \frac{r^2}{a^2} \left(\frac{1+A}{1-A} - 1 \right) \right] \quad (16)$$

nella quale è stata fatta la posizione

$$A = \frac{a^4 - r_o^4}{a^4 + r_o^4} \quad (17)$$

il problema delle oscillazioni della massa idrica contenuta nel bacino presenta una soluzione in forma chiusa (Lynett P.J. et al., 2002). Nelle equazioni precedenti r_o è la distanza dal centro del bacino in corrispondenza della quale la condizione iniziale esibisce tirante nullo.

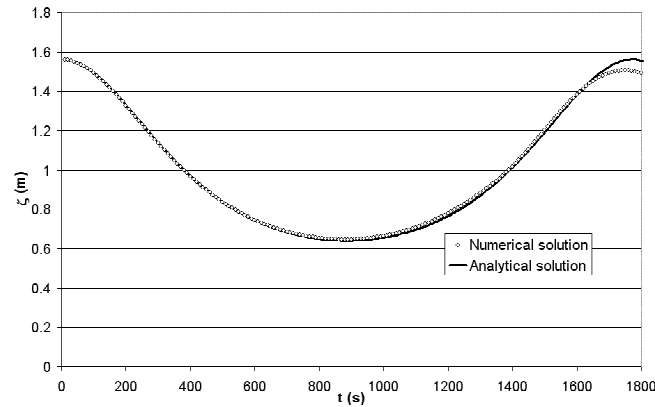


Figura 4. Onda risonante in un bacino parabolico: confronto tra la soluzione numerica e la soluzione analitica.

Il caso è già stato affrontato, in letteratura tecnica, facendo riferimento ai seguenti valori dei parametri geometrici: $a = 2500$ m, $r_o = 2000$ m, $h_o = 1$ m (Kim D. et al.,

2004). A tale fine, il dominio di calcolo, di forma quadrata, avente lato pari a 8000 m, è stato discretizzato con 92512 elementi triangolari; la soglia per la definizione delle celle asciutte è stata posta pari a $\varepsilon=10^{-5}$ m, e si è fatto uso di $\beta=1$ e $\Delta t=2$ s. Nella Figura 4 viene mostrato il confronto tra la soluzione fornita dal modello numerico e la soluzione analitica in corrispondenza del centro del bacino parabolico: le caratteristiche del moto vengono catturate piuttosto fedelmente per quasi tutto il primo periodo, alla fine del quale l'effetto cumulato delle dissipazioni numeriche altera in maniera sostanziale la soluzione. Questo effetto, comune a tutti i modelli numerici con ordine di precisione pari al secondo (come si può osservare confrontando con i risultati di Kim D. et al., 2004), può essere corretto solo attingendo ordini superiori di precisione (come nel modello di Lynett P.J. et al., 2002). I risultati lievemente peggiori di quelli ottenuti, per questo stesso test, da Kim et al. (2004), possono essere attribuiti al mancato attingimento del secondo ordine di precisione nello spazio della soluzione in corrispondenza delle celle parzialmente bagnate del tipo *flooding*.

Nel secondo test viene proposto un confronto tra i risultati forniti dal modello numerico presentato e i dati sperimentali di una serie di prove di laboratorio eseguite da J.M. Hiver presso il Laboratoire de Recherches Hydrauliques, Châtelet, in Belgio, e descritta da Brufau P. et al. (2002). In una canaletta lunga 38 m e larga 0.75 m è presente un serbatoio lungo 15.5 m e alto 0.75 m, chiuso da una paratoia. La rimozione improvvisa della paratoia provoca la formazione di un'onda, che si muove fino a sormontare una soglia triangolare, simmetrica, alta 40 cm, e lunga 6 m; a valle della soglia è disposto un accumulo di acqua, inizialmente in quiete, profondo 15 cm (Figura 5). Per il fondo della canaletta fu valutata una scabrezza di Strickler pari a $80 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$, e per le pareti una scabrezza di Strickler pari a $90 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$. Per eseguire il test numerico, il dominio di calcolo è stato discretizzato con 3082 elementi triangolari, cui è stata attribuita scabrezza di Strickler pari a $85 \text{ m}^{1/3}/\text{s}$; il passo temporale è stato preso pari a $\Delta t=0.0005$ s, mentre per la limitazione dei gradienti è stato utilizzato il coefficiente $\beta=1$.

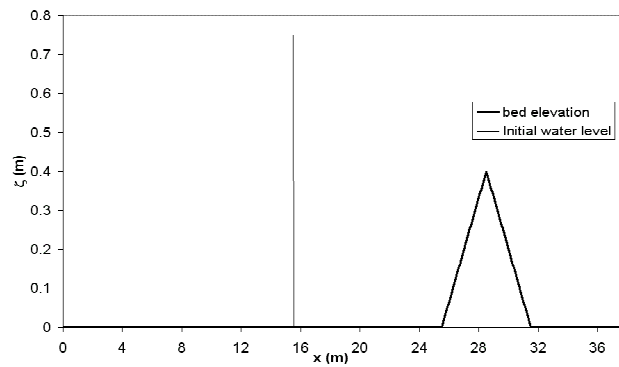


Figura 5. Dam-break su soglia triangolare: condizioni iniziali.

Nella canaletta erano disposti diversi idrometri, a distanze variabili dalla paratoia che chiude il serbatoio. Nelle Figure 6 e 7 sono rappresentati i confronti tra i risultati del modello numerico e i risultati sperimentali agli idrometri G4 e G20, posti alla distanza di 4 e 20 m dalla paratoia di chiusura del serbatoio, rispettivamente. I risultati numerici,

paragonabili a quelli ottenuti da altri autori (Brufau P. et al., 2002), mostrano, da un lato, la buona capacità del modello di catturare gli istanti di arrivo sia della prima onda, che delle onde riflesse, sia una generale capacità di simulare l'ordine di grandezza dei valori estremi del tirante, il che ne rende l'uso favorevole quando si vogliano fare valutazioni sull'ampiezza delle aree allagate, a seguito di crollo di diga, o di propagazione, urto e arresto di fenomeni di colata rapida. E' particolarmente evidente, dalla Figura 7, la capacità del modello numerico di conservare la quiete nell'accumulo d'acqua a valle della soglia fino all'arrivo della prima onda che la sormonta, confermando la compatibilità del trattamento dei flussi e del trattamento dei termini sorgente.

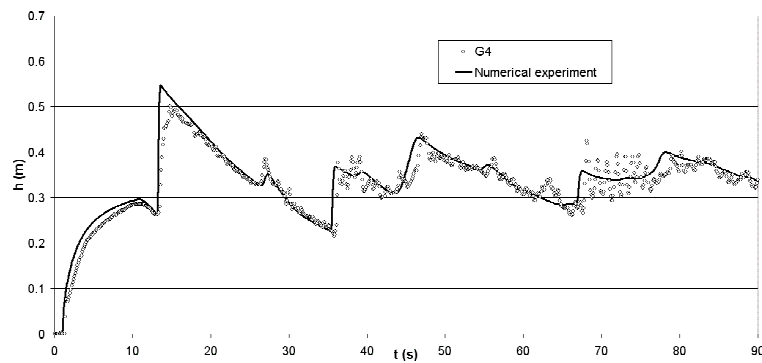


Figura 6. Dam-break su soglia triangolare: idrometro G4.

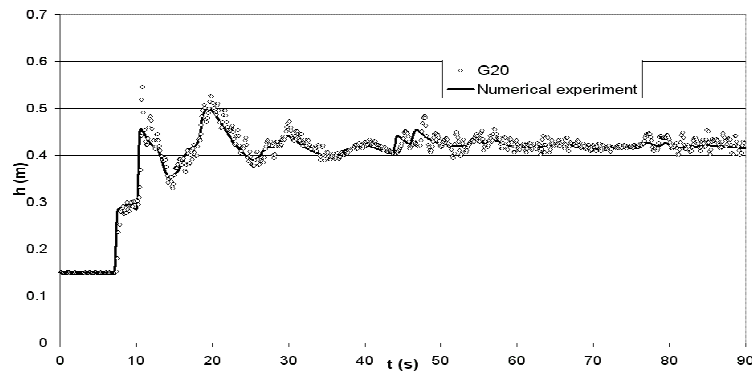


Figura 7. Dam-break su soglia triangolare: idrometro G20.

4 CONCLUSIONI

In questa memoria è stato presentato un modello numerico per l'approssimazione della soluzione delle Shallow-water Equations, in presenza di topografie complesse. Il modello, basato sull'adozione del Metodo dei Volumi Finiti, e rispettante la proprietà di compatibilità in forma continua, fa uso di un approccio unitario per attingere soluzioni fisicamente congruenti sia nel caso in cui il dominio computazionale sia completamente

occupato dall'acqua, sia nel caso in cui il dominio computazionale sia, almeno in parte, asciutto. Al fine di validare il modello, sono stati mostrati alcuni test numerici, in condizioni di moto vario, relativi sia a casi per i quali le Shallow-Water Equations presentano soluzioni analitiche, sia ispirati a prove di laboratorio per le quali sono stati resi pubblici i risultati delle misure eseguite. Questi esperimenti numerici hanno permesso di valutare la capacità, da parte del modello presentato, di simulare fenomeni di rapidi transitori anche nel caso di topografia complessa.

Ringraziamenti. Si ringrazia il Commissariato di Governo per l'Emergenza Idrogeologica in Campania per il supporto tecnico e economico forniti nell'ambito della Convenzione dal titolo "Modellazione Numerica dei Fenomeni di Colata Rapida" stipulata con il Dipartimento di Ingegneria Idraulica e Ambientale "G. Ippolito" dell'Università di Napoli Federico II.

BIBLIOGRAFIA

- Akanbi A.A., Katopodes N.D., (1988). "Model for flood propagation of initially dry land", J. Hydraul. Eng. ASCE 114 (7).
- Anastasiou H., Chan C.T., (1997). "Solution of the 2D Shallow water equations on unstructured triangular meshes", Int. J. Num. Meth. Fluids 24 (11).
- Anderson W.K., Bonhaus D.L., (1994). "An implicit upwind algorithm for computing turbulent flows on unstructured grids", Comp. Fluids 23 (1).
- Bates P.D., Hervouet J., (1999). "A new method for moving-boundary hydrodynamic problems in shallow water", Proc. R. Soc. Lond. A 455.
- Bradford S.F., Sanders B.F., (2002). "Finite-volume model for shallow water flooding of arbitrary topography", ASCE J. Hydraul. Eng., 128 (3).
- Brufau P., Vázquez-Cendón M.E., García-Navarro P., (2002). "A numerical model for the flooding and drying of irregular domains". Int. J. Num. Meth. Fluids 39 (3).
- Cozzolino L., (2005). "Modellazione numerica della qualità delle acque nei corpi idrici superficiali", Tesi presentata per il conseguimento del Titolo di Dottore di Ricerca, Università di Napoli Federico II, Napoli.
- Cozzolino L., Pianese D., (2004). "Soluzione accurata delle Shallow-Water Equations", Atti del Workshop sulla Modellazione Matematica delle Catastrofi Idrogeologiche, 30-31 Marzo, Arcavacata di Rende, Cosenza.
- Fraccarollo L., Toro E.F., (1995). "Experimental and numerical assessment of the shallow water model for two-dimensional dam-break type problems", J. Hyd. Res. IAHR 33 (6).
- Hou T.Y., Le Floch P., (1994). "Why non-conservative schemes converge to the wrong solution: Error analysis", Math. of Comput. 16 (12).
- Kim D., Guo Y., & Kim W., (2004). "Weighted averaged flux-type scheme for shallow-water equations with fractional step method". J. Eng. Mech. ASCE 130 (2).
- Komai S., Bechteler W., (2004). "An improved, robust implicit solution for the two-dimensional shallow water equations on unstructured grids", in RiverFlow 2004, Proceedings of the International Conference on Fluvial Hydraulics, Napoli, Italy, a cura di Greco, Carravetta e Della Morte, Balkema, Leiden/ London.
- Lynett P.J., Wu T., Liu P.L., (2002). "Modeling wave runup with depth-integrated equation", Coast. Eng. 46 (2).
- Toro E.F., (1997), "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics", Springer-Verlag, Berlin.
- Zhou J.G., Causon D.M., Mingham C.G., Ingram D.M., (2001). "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow-water equations", J. Comput. Phys. 168 (1).